

Introduction

Formalisation du problème
La notion d'incertitude, ou "entropie"
Résolution du problème
Conclusion

Énoncé du problème

Premières remarques
Programme pour la suite



Introduction

Formalisation du problème
La notion d'incertitude, ou "entropie"
Résolution du problème
Conclusion

Énoncé du problème

Premières remarques
Programme pour la suite

Le(s) Problème(s)

Le(s) Problème(s)

Problème (Questionnaire optimal)

Quel méthode pour construire un questionnaire qui va "au plus vite" ?

Le(s) Problème(s)

Problème (Questionnaire optimal)

Quelle méthode pour construire un questionnaire qui va "au plus vite" ?

Problème (Nombre de questions)

Combien de questions à poser pour un questionnaire optimal ?

Introduction

Formalisation du problème
La notion d'incertitude, ou "entropie"
Résolution du problème
Conclusion

Énoncé du problème
Premières remarques
Programme pour la suite

Quelles sont les bonnes questions ?

Quelles sont les bonnes questions ?

Celles dont on a aucune raison de privilégier une réponse affirmative ou négative

Quelles sont les bonnes questions ?

Celles dont on a aucune raison de privilégier une réponse affirmative ou négative

Exemple

"Est-ce un personnage réel ou fictif?"

Les enjeux

On a donc une idée de comment procéder

Les enjeux

On a donc une idée de comment procéder

MAIS

Les enjeux

On a donc une idée de comment procéder

MAIS

Les termes sont trop **flous** pour pouvoir démontrer quoi que ce soit

Les enjeux

On a donc une idée de comment procéder

MAIS

Les termes sont trop **flous** pour pouvoir démontrer quoi que ce soit
L'enjeu : donner un **sens précis** aux choses, puis les étudier
rigoureusement

Introduction

Formalisation du problème
La notion d'incertitude, ou "entropie"
Résolution du problème
Conclusion

Énoncé du problème

Premières remarques

Programme pour la suite

De la nécessité de la formalisation

De la nécessité de la formalisation

Supposons qu'il n'y ait que trois personnages possibles, A, B et C.

De la nécessité de la formalisation

Supposons qu'il n'y ait que trois personnages possibles, A, B et C.
Supposons maintenant que parmi ces trois personnages, l'un soit
une **superstar**, et les deux autres soient **inconnus**

De la nécessité de la formalisation

Attention

La notion d'optimalité n'a rien d'évident. Il est donc nécessaire de lui donner un sens précis, ainsi qu'aux autres notions utilisées.

Introduction

Formalisation du problème

La notion d'incertitude, ou "entropie"

Résolution du problème

Conclusion

Énoncé du problème

Premières remarques

Programme pour la suite

Programme pour la suite

Programme pour la suite

- Donner un sens précis :

Programme pour la suite

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire

Programme pour la suite

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire

Programme pour la suite

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé

Programme pour la suite

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal

Programme pour la suite

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal
- Étudier l'optimalité du procédé proposé

Introduction

Formalisation du problème

La notion d'incertitude, ou "entropie"

Résolution du problème

Conclusion

Qu'est-ce qu'un questionnaire ?

L'optimalité

Le procédé proposé

Comment dessiner un questionnaire ?

Comment dessiner un questionnaire ?

Si on note N le nombre de personnages auxquels on peut penser,

Comment dessiner un questionnaire ?

Si on note N le nombre de personnages auxquels on peut penser, un questionnaire peut naturellement être représenté par un **arbre binaire** et de N **noeuds** de cet arbre, marquant la fin du questionnaire, c'est-à-dire l'obtention d'une réponse.

Comment dessiner un questionnaire ?

Si on note N le nombre de personnages auxquels on peut penser, un questionnaire peut naturellement être représenté par un **arbre binaire** et de N **noeuds** de cet arbre, marquant la fin du questionnaire, c'est-à-dire l'obtention d'une réponse. Mais pour être sûr que ce soit une **bonne définition**, il faut se poser la **question inverse** :

La question inverse

Problème

Est-ce que **n'importe quel** choix **d'arbre**, et **n'importe quel** choix de **N noeuds** dans cet arbre peut représenter un questionnaire ?

La question inverse

Problème

Est-ce que **n'importe quel** choix **d'arbre**, et **n'importe quel** choix de **N noeuds** dans cet arbre peut représenter un questionnaire ?

Réponse

Non, il faut qu'**aucun** des noeuds ne soit ancêtre d'un autre.

Introduction

Formalisation du problème

La notion d'incertitude, ou "entropie"

Résolution du problème

Conclusion

Qu'est-ce qu'un questionnaire ?

L'optimalité

Le procédé proposé

La définition

La définition

Définition

Un questionnaire est un couple (A, T) où A est un arbre binaire et T un ensemble de N noeuds dont aucun n'est parent d'un autre.

Introduction

Formalisation du problème

La notion d'incertitude, ou "entropie"

Résolution du problème

Conclusion

Qu'est-ce qu'un questionnaire ?

L'optimalité

Le procédé proposé

Le contrat

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal
- Étudier l'optimalité du procédé proposé

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal
- Étudier l'optimalité du procédé proposé

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal
- Étudier l'optimalité du procédé proposé

Introduction

Formalisation du problème

La notion d'incertitude, ou "entropie"

Résolution du problème

Conclusion

Qu'est-ce qu'un questionnaire ?

L'optimalité

Le procédé proposé

De la nécessité des probabilités

De la nécessité des probabilités

Comme on l'a vu, la définition de l'optimalité doit prendre en compte le caractère **fondamentalement probabiliste** de l'expérience

Introduction

Formalisation du problème

La notion d'incertitude, ou "entropie"

Résolution du problème

Conclusion

Qu'est-ce qu'un questionnaire ?

L'optimalité

Le procédé proposé

L'univers

L'univers

Vocabulaire

Pour une expérience aléatoire donnée, on appelle **univers**, classiquement noté Ω , l'ensemble des issues possibles

L'univers

Vocabulaire

Pour une expérience aléatoire donnée, on appelle **univers**, classiquement noté Ω , l'ensemble des issues possibles

Exemple (Lancer de dé)

Pour un lancer de dé à six faces, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Introduction

Formalisation du problème

La notion d'incertitude, ou "entropie"

Résolution du problème

Conclusion

Qu'est-ce qu'un questionnaire ?

L'optimalité

Le procédé proposé

Événement

Événement

Vocabulaire

On appelle **événement** tout sous-ensemble de l'univers Ω

Événement

Vocabulaire

On appelle **événement** tout sous-ensemble de l'univers Ω

Exemple (Lancer de dé)

Pour un lancer de dé, "le résultat est pair", ce qui correspond au sous-ensemble $\{2, 4, 6\}$, est un événement.

Introduction

Formalisation du problème

La notion d'incertitude, ou "entropie"

Résolution du problème

Conclusion

Qu'est-ce qu'un questionnaire ?

L'optimalité

Le procédé proposé

Distribution de probabilité

Distribution de probabilité

Définition (Distribution de probabilité)

Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est un ensemble fini, et $p = (p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une collection de réels entre 0 et 1, on dit que p est une **distribution de probabilité** sur Ω si

$$p_{\omega_1} + p_{\omega_2} + \dots + p_{\omega_n} = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$$

Distribution de probabilité

Définition (Distribution de probabilité)

Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est un ensemble fini, et $p = (p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une collection de réels entre 0 et 1, on dit que p est une **distribution de probabilité** sur Ω si

$$p_{\omega_1} + p_{\omega_2} + \dots + p_{\omega_n} = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$$

Exemple (Lancé de dé)

Sur $\{1, 2, \dots, 6\}$, $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$ est une distribution de probabilité, la plus naturelle pour modéliser un lancer de dé non truqué

Introduction

Formalisation du problème

La notion d'incertitude, ou "entropie"

Résolution du problème

Conclusion

Qu'est-ce qu'un questionnaire ?

L'optimalité

Le procédé proposé

Probabilité d'un événement

Probabilité d'un événement

Définition (Probabilité d'un événement)

Soit Ω un ensemble fini, p une distribution de probabilité sur Ω , et A un événement. On définit p_A la **probabilité de l'événement A** par :

$$p_A = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

Probabilité d'un événement

Définition (Probabilité d'un événement)

Soit Ω un ensemble fini, p une distribution de probabilité sur Ω , et A un événement. On définit p_A la **probabilité de l'événement A** par :

$$p_A = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

Exemple (Lancer de dé)

Pour un lancer de dé non truqué, la probabilité de l'événement : "le résultat est pair" est $p_2 + p_4 + p_6 = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Introduction

Formalisation du problème

La notion d'incertitude, ou "entropie"

Résolution du problème

Conclusion

Qu'est-ce qu'un questionnaire ?

L'optimalité

Le procédé proposé

Conditionnement

Conditionnement

Définition (Probabilité sachant un événement)

Soit Ω un ensemble, p une distribution de probabilité sur Ω , et A un événement de probabilité non-nulle. On définit la distribution de probabilité "sachant A " $p^{(A)}$ par :

$$p_{\omega}^{(A)} = \begin{cases} \frac{p_{\omega}}{p_A} & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Conditionnement

Définition (Probabilité sachant un événement)

Soit Ω un ensemble, p une distribution de probabilité sur Ω , et A un événement de probabilité non-nulle. On définit la distribution de probabilité "sachant A " $p^{(A)}$ par :

$$p_{\omega}^{(A)} = \begin{cases} \frac{p_{\omega}}{p_A} & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple (Lancer de dé)

Pour un lancer de dé, la probabilité que le résultat soit 2 sachant que celui-ci est pair est $\frac{1}{3}$

Introduction

Formalisation du problème

La notion d'incertitude, ou "entropie"

Résolution du problème

Conclusion

Qu'est-ce qu'un questionnaire ?

L'optimalité

Le procédé proposé

Indépendance

Indépendance

Définition

Soient A et B deux événements. On dit qu'ils sont indépendants si l'événement " A et B sont réalisés", noté $A \cap B$, a pour probabilité :

$$p_{A \cap B} = p_A \times p_B$$

Ce qui est la même chose que de dire que $p_B^{(A)} = p_B$

Indépendance

Définition

Soient A et B deux événements. On dit qu'ils sont indépendants si l'événement " A et B sont réalisés", noté $A \cap B$, a pour probabilité :

$$p_{A \cap B} = p_A \times p_B$$

Ce qui est la même chose que de dire que $p_B^{(A)} = p_B$

Exemple (Deux lancers de pièce indépendants)

Si on lance deux pièces de façon indépendante, l'univers est $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$ et la probabilité que l'on obtienne une certaine issue est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Notations

Notations

Dans la suite, on notera N le nombre de personnages possibles, $\Omega = \{1, \dots, N\}$ l'ensemble de ces personnages possibles, p_i la probabilité que le personnage i apparaisse, et pour un questionnaire donné, on notera l_i la longueur de la série de questions pour aboutir au personnage i .

Introduction

Formalisation du problème

La notion d'incertitude, ou "entropie"

Résolution du problème

Conclusion

Qu'est-ce qu'un questionnaire ?

L'optimalité

Le procédé proposé

Qu'est-ce qu'un questionnaire optimal ?

Qu'est-ce qu'un questionnaire optimal ?

Attention

Comme on l'avait vu, il est nécessaire de prendre en compte le caractère **fondamentalement probabiliste** de l'expérience.

Qu'est-ce qu'un questionnaire optimal ?

Définition

Soit Q un questionnaire. Notons l_i la longueur de la série de questions pour arriver à i . On définit la longueur moyenne de Q , notée $\mathbb{E}(Q)$ (comme "espérance"), par :

$$\mathbb{E}(Q) = \sum_{i=1}^N p_i l_i$$

Qu'est-ce qu'un questionnaire optimal ?

Définition

Soit Q un questionnaire. Notons l_i la longueur de la série de questions pour arriver à i . On définit la longueur moyenne de Q , notée $\mathbb{E}(Q)$ (comme "espérance"), par :

$$\mathbb{E}(Q) = \sum_{i=1}^N p_i l_i$$

Définition

On dira que Q est optimal si pour tout autre questionnaire Q' ,

$$\mathbb{E}(Q) \leq \mathbb{E}(Q')$$

Introduction

Formalisation du problème

La notion d'incertitude, ou "entropie"

Résolution du problème

Conclusion

Qu'est-ce qu'un questionnaire ?

L'optimalité

Le procédé proposé

Le contrat

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal
- Étudier l'optimalité du procédé proposé

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal
- Étudier l'optimalité du procédé proposé

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal
- Étudier l'optimalité du procédé proposé

Introduction

Formalisation du problème

La notion d'incertitude, ou "entropie"

Résolution du problème

Conclusion

Qu'est-ce qu'un questionnaire ?

L'optimalité

Le procédé proposé

Le questionnaire de Fano

Le questionnaire de Fano

Définition (Principe de dichotomie)

Soit $\Omega = \{1, \dots, M\}$, $p = (p_1, \dots, p_M)$, avec $p_M \geq \dots \geq p_1$. On sépare Ω en deux sous-ensembles $\Omega_1 = \{1, \dots, u\}$ et $\Omega_2 = \{u + 1, \dots, M\}$, où u est le plus petit entier tel que :

$$p_1 + \dots + p_u \geq \frac{1}{2}$$

Le questionnaire de Fano

Définition (Principe de dichotomie)

Soit $\Omega = \{1, \dots, M\}$, $p = (p_1, \dots, p_M)$, avec $p_M \geq \dots \geq p_1$. On **sépare** Ω en deux sous-ensembles $\Omega_1 = \{1, \dots, u\}$ et $\Omega_2 = \{u + 1, \dots, M\}$, où u est le plus petit entier tel que :

$$p_1 + \dots + p_u \geq \frac{1}{2}$$

Définition

On appellera le **questionnaire de Fano** le questionnaire obtenu par l'itération successive du **principe de dichotomie**

Introduction

Formalisation du problème

La notion d'incertitude, ou "entropie"

Résolution du problème

Conclusion

Qu'est-ce qu'un questionnaire ?

L'optimalité

Le procédé proposé

Le contrat

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal
- Étudier l'optimalité du procédé proposé

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal
- Étudier l'optimalité du procédé proposé

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
 - ▶ à la notion d'incertitude
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal
- Étudier l'optimalité du procédé proposé

Qu'est-ce que le logarithme ?

Qu'est-ce que le logarithme ?

C'est une fonction de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}

Qu'est-ce que le logarithme ?

C'est une fonction de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}
Elle est traditionnellement notée \log

Qu'est-ce que le logarithme ?

C'est une fonction de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}
Elle est traditionnellement notée \log
Elle vérifie des propriétés bien particulières

Graphe du logarithme



Propriétés fondamentales du logarithme

Proposition (Propriétés fondamentales du logarithme)

Soient a, b deux réels strictement positifs. Alors :

- 1 $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$
- 2 $\log(2) = 1$
- 3 $\log(1) = 0$
- 4 $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

Propriétés fondamentales du logarithme

Proposition (Propriétés fondamentales du logarithme)

Soient a, b deux réels strictement positifs. Alors :

- 1 $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$
- 2 $\log(2) = 1$
- 3 $\log(1) = 0$
- 4 $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

Un mot d'ordre : \log transforme les **multiplications** en **additions**

Conséquence immédiate mais utile

Proposition

Soit n un entier. Alors :

$$\log(2^n) = n$$

Objectif

Problème

Trouver une fonction H qui à une **distribution de probabilité** associe la **quantité d'incertitude** quant au résultat de l'expérience.

Objectif

Problème

Trouver une fonction H qui à une **distribution de probabilité** associe la **quantité d'incertitude** quant au résultat de l'expérience.

Méthode

On va chercher des **axiomes pertinents**, c'est-à-dire des propriétés qui nous paraissent naturelles à imposer à notre fonction. Puis, on verra si ces axiomes ne nous disent pas quelle fonction pourrait convenir.

Quatre axiomes

Quatre axiomes

Pour tout entier n ,
$$H\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right) \geq H\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \quad (\mathcal{A}_1)$$

Quatre axiomes

Pour tout entier n ,
$$H\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right) \geq H\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \quad (\mathcal{A}_1)$$

$$H\left(\frac{1}{nm}, \dots, \frac{1}{nm}\right) - H\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = H\left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right) \quad (\mathcal{A}_2)$$

Quatre axiomes

Pour tout entier n ,
$$H\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right) \geq H\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \quad (\mathcal{A}_1)$$

$$H\left(\frac{1}{nm}, \dots, \frac{1}{nm}\right) - H\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = H\left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right) \quad (\mathcal{A}_2)$$

$$H(p) - H(p_A, 1 - p_A) = p_A H(p^{(A)}) + (1 - p_A) H(p^{(\bar{A})}) \quad (\mathcal{A}_3)$$

Quatre axiomes

Pour tout entier n ,
$$H\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right) \geq H\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \quad (\mathcal{A}_1)$$

$$H\left(\frac{1}{nm}, \dots, \frac{1}{nm}\right) - H\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = H\left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right) \quad (\mathcal{A}_2)$$

$$H(p) - H(p_A, 1 - p_A) = p_A H(p^{(A)}) + (1 - p_A) H(p^{(\bar{A})}) \quad (\mathcal{A}_3)$$

$$q \mapsto H(q, 1 - q) \text{ continue} \quad (\mathcal{A}_4)$$

Une seule fonction possible (ou presque)

Théorème

Les seules fonctions vérifiant (\mathcal{A}_1) , (\mathcal{A}_2) , (\mathcal{A}_3) et (\mathcal{A}_4) sont les :

$$p = (p_1, \dots, p_n) \mapsto -C \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

où C est une constante positive.

L'entropie

Définition

On appellera entropie la fonction :

$$p = (p_1, \dots, p_n) \mapsto - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

que l'on notera H

Le contrat

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
 - ▶ à la notion d'incertitude
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal
- Étudier l'optimalité du procédé proposé

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
 - ▶ à la notion d'incertitude
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal
- Étudier l'optimalité du procédé proposé

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
 - ▶ à la notion d'incertitude
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal
- Étudier l'optimalité du procédé proposé

Le problème

Le problème

Problème (Problème de la borne inférieure)

Trouver $K > 0$ telle que, pour tout questionnaire Q :

$$\mathbb{E}(Q) \geq K$$

Un rappel

Un rappel

Rappel

Un questionnaire est un **arbre binaire** ainsi que N **noeuds** dont **aucun est ancêtre d'un autre**.

Un rappel

Rappel

Un questionnaire est un **arbre binaire** ainsi que N **noeuds** dont **aucun est ancêtre d'un autre**.

Mais qu'est-ce que cette **propriété** nous impose sur la longueur moyenne minimale d'un questionnaire ?

Une remarque

Une remarque

Proposition

Un arbre de profondeur n possède 2^n noeuds terminaux.

Inégalité de Kraft

Théorème

Si Q est un questionnaire, alors, en notant l_i la longueur de la série de questions aboutissant à i :

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2^{l_i}} \leq 1 \quad (\text{Kr})$$

Intuition

Intuition

Conjecture

L'entropie étant le "manque d'information" dont on dispose sur l'issue d'une expérience aléatoire, on sent que ce sera notre borne inférieure. On va le montrer grâce à l'inégalité de Kraft.

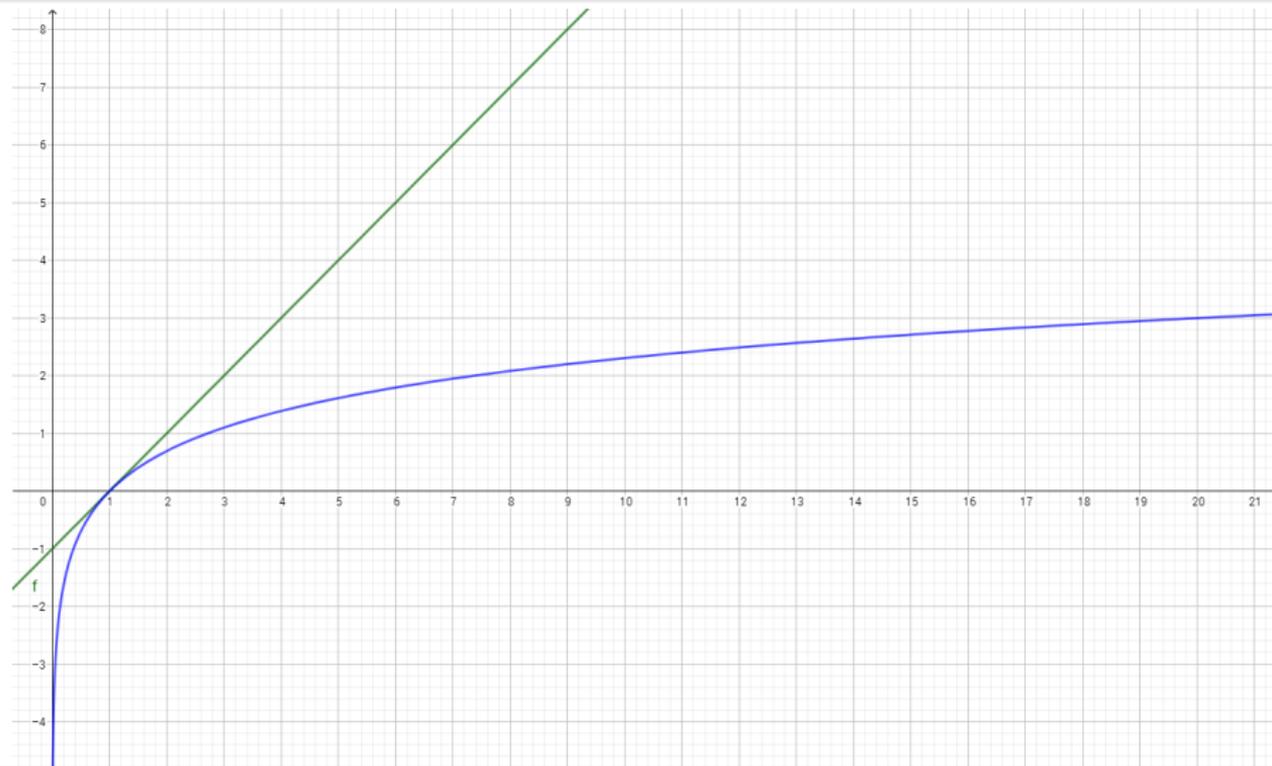
Un rappel

Proposition

Soit n un entier. Alors :

$$\log(2^n) = n$$

Un coup de pouce



L'entropie est la borne inférieure

Théorème

Pour tout questionnaire Q :

$$\mathbb{E}(Q) \geq H(p)$$

Le contrat

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
 - ▶ à la notion d'incertitude
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal
- Étudier l'optimalité du procédé proposé

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
 - ▶ à la notion d'incertitude
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal
- Étudier l'optimalité du procédé proposé

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
 - ▶ à la notion d'incertitude
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal
- Étudier l'optimalité du procédé proposé

La désillusion

La désillusion

Remarque

Le questionnaire de Fano n'est pas toujours optimal.

La consolation

La consolation

Théorème

Le questionnaire de Fano est "presque optimal", au sens où :

$$H(p) \leq \mathbb{E}(Q) < H(p) + 1$$

Un nouvel espoir

Un nouvel espoir

Théorème

Le questionnaire de Huffman est optimal

Le contrat

Le contrat

- Donner un sens précis :

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal

Le contrat

- Donner un sens précis :
 - ▶ à la notion de questionnaire
 - ▶ à la notion d'optimalité d'un questionnaire
 - ▶ au procédé proposé
- Déterminer combien de questions à poser pour un questionnaire optimal
- Étudier l'optimalité du procédé proposé

Introduction
Formalisation du problème
La notion d'incertitude, ou "entropie"
Résolution du problème
Conclusion

Sur le problème lui-même
Sur Akinator
Au-delà du problème

Les questions non-abordées

Les questions non-abordées

- Comment trouver une distribution de probabilité pertinente ?

Les questions non-abordées

- Comment trouver une distribution de probabilité pertinente ?
- Comment fait Akinator pour formuler ses questions en français ?

Introduction
Formalisation du problème
La notion d'incertitude, ou "entropie"
Résolution du problème
Conclusion

Sur le problème lui-même
Sur Akinator
Au-delà du problème

La démarche

La démarche

- Définition des termes du problème, c'est-à-dire constitution d'un modèle

La démarche

- Définition des termes du problème, c'est-à-dire constitution d'un modèle
- Résolution du problème

La démarche

- Définition des termes du problème, c'est-à-dire constitution d'un modèle
- Résolution du problème
- Discussion des limites du modèles

La démarche

- Définition des termes du problème, c'est-à-dire constitution d'un modèle
- Résolution du problème **au sein du modèle**
- Discussion des limites du modèles