Voyage en dimensions supérieures

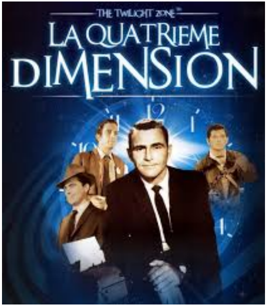
Eva Philippe

Séminaire Maths pour Tous

Lundi 13 novembre 2017

La quatrième dimension ?

Corpus hypercubus, Salvador Dali, 1954



La quatrième dimension, version française de la série américiaine *The twilight zone*, diffusée de 1959 à 1964

Un peu d'histoire...

- Antiquité, Aristote : la ligne, la surface et le corps (ou volume) $\rightarrow$ "Il n'y a pas de grandeurs autres que celles-là, parce que trois est tout et que trois renferme toutes les dimensions possibles."
- 18e siècle, d'Alembert : « Un homme d'esprit de ma connaissance croit qu'on pourrait cependant regarder la durée comme une quatrième dimension »
- 19e siècle : le mathématicien allemand Ludwig Schläfi (1814-1895) imagine un espace de dimension 4 et démontre des théorèmes de géométrie.

Sommaire

Pourquoi les dimensions supérieures ?

- Dépasser les limites de notre perception
- Prendre de la hauteur : imaginer la forme de l'Univers
- Résoudre des problèmes concrets

Mais qu'entend-on par dimensions ?

Espaces euclidiens

A partir d'un point de départ, on peut atteindre n'importe quel autre point en se déplaçant dans une unique direction, selon une droite.

Définition

La *dimension* d'un espace correspond au nombre minimal de directions qui suffisent à atteindre toutes les positions de l'espace en ne se déplaçant que selon ces directions.

Mais qu'entend-on par dimensions ?

Une notion plus générale

- "points" = objets les plus élémentaires qu'on regarde
- "espace" = espace des possibles de ce que peuvent être tous ces points
- nombre de dimensions = nombre de paramètres nécessaires pour caractériser notre objet parmi tous les possibles

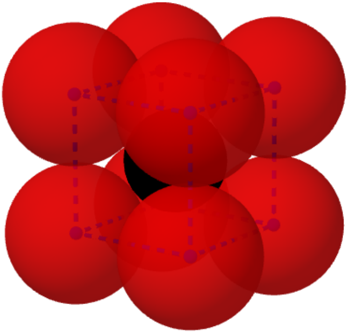
Quelques exemples

- évolution de la température au cours du temps
- images numériques
- optimisation de la production industrielle

Sommaire

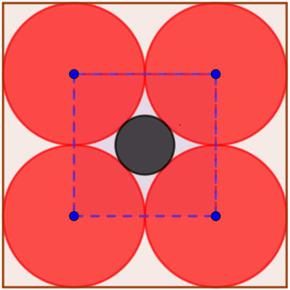
Un problème de boules de pétanque et sa généralisation

On veut pouvoir ranger notre jeu de pétanque de la manière suivante : les boules de pétanque sont placées aux sommets d'un cube en se touchant deux à deux alors que le cochonnet est au centre de ce cube. Quelle est la taille maximale du cochonnet ?

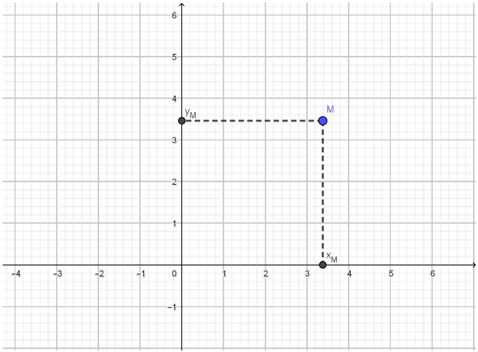


Commençons par la version en dimension 2

Quatre disques sont placés aux sommets d'un carré en se touchant deux à deux et on veut placer un petit cercle (le contour du cochonnet) au centre de ce carré, qui ne traverse pas les disques. Quel est son rayon maximal ?



Coordonnées cartésiennes

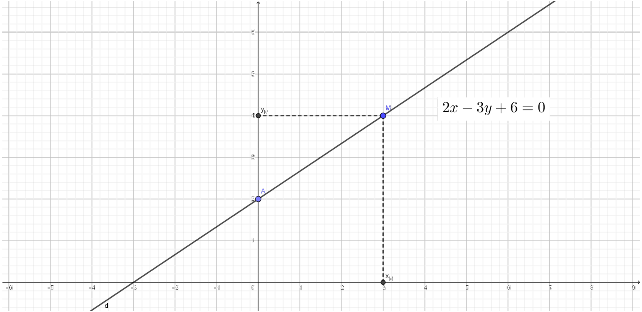


Équation d'une droite

Équation d'une droite

Une droite (d) est définie par une équation de la forme

$$ax + by + c = 0, \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont trois nombres réels.}$$



Équation d'un cercle

Définition

Un *cercle* de centre C et de rayon r est l'ensemble des points du plan qui se situent à une distance exactement égale à r du point C.

Distance d'un point à l'origine

Dans un repère cartésien, la distance entre l'origine et un point X de coordonnées (x, y) se calcule :

$$d(O, X) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Calcul de la distance

Dans un repère cartésien, la distance entre deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) se calcule :

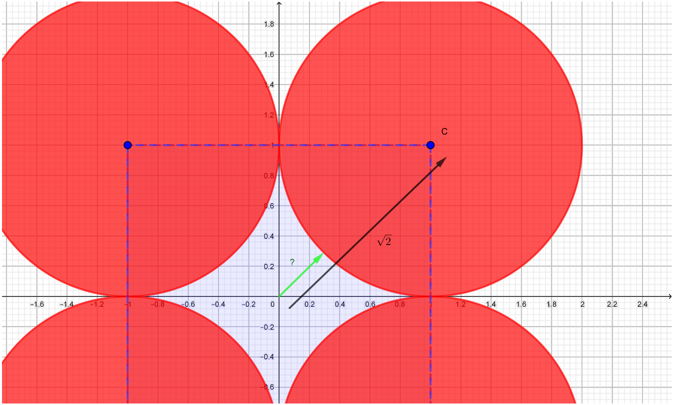
$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Une notion plus générale

Propriétés d'une distance

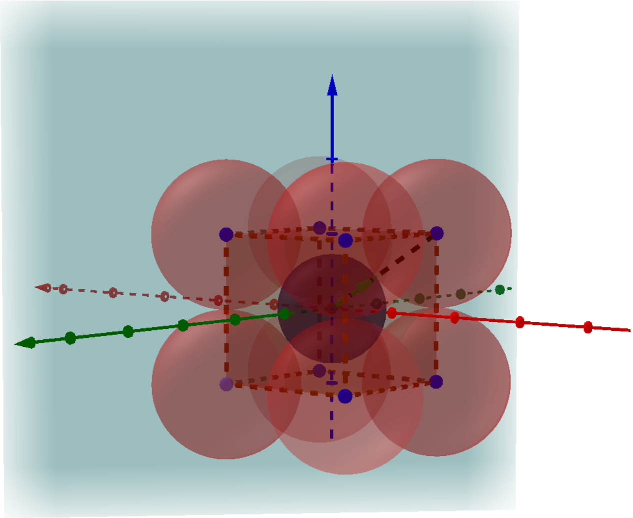
- la distance d'un point A à un point B est la même que la distance du point B au point A (symétrie)
- deux points qui sont à distance 0 sont en fait le même point (séparation)
- c'est toujours plus court d'aller directement d'un point A à un point B que de passer par un troisième point C : $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ (inégalité triangulaire).

Résolution en dimension 2



$$l_2 = \sqrt{2} - 1 \simeq 0,4142.$$

Retour en dimension 3



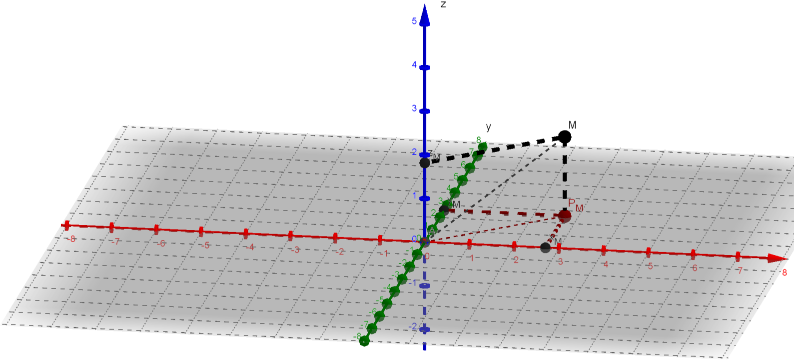
Calcul de la distance en dimension 3

Calcul de la distance

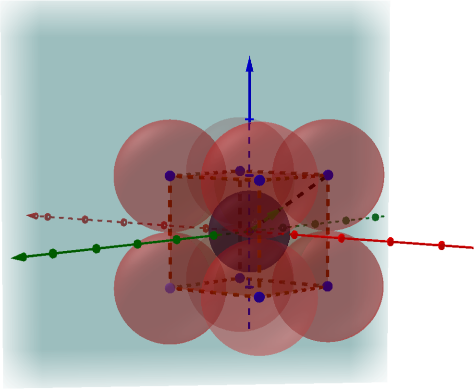
Dans un repère cartésien à trois dimensions, la distance entre l'origine et un point X de coordonnées (x, y, z) se calcule :

$$d(O, X) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Calcul de la distance en dimension 3



Résolution du problème en dimension 3



$$l_3 = \sqrt{3} - 1 \simeq 0,7321.$$

Et si on généralise ?

L'espace euclidien à n dimensions

L'espace euclidien à n dimensions $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets de nombres réels de la forme $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où l'on peut voir les x_i comme les coordonnées du point selon n axes orthogonaux et gradués avec la même unité.

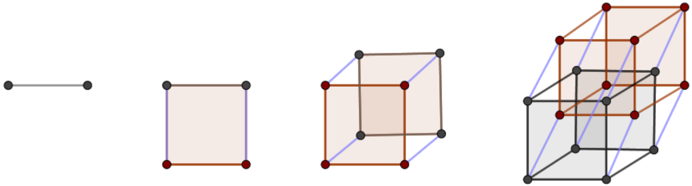
Distance à l'origine d'un point X de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$d(O, X) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

Un cube en dimension 4 ?

Construction :

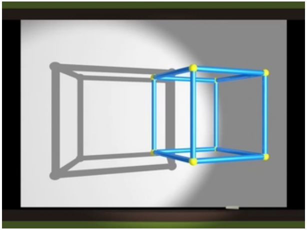
- par des équations algébriques
- par récurrence



segment (dimension 1) carré (dimension 2) cube (dimension 3) hypercube (dimension 4)

Représentation d'un hypercube

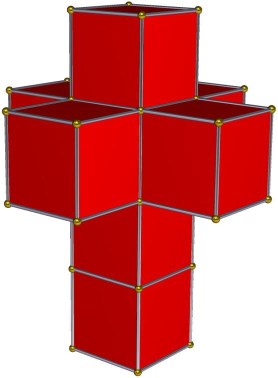
- projections

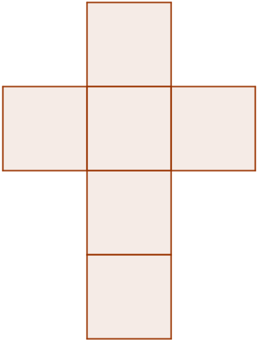


Cliquer pour voir la projection d'un cube en 2D puis d'un hypercube en 3D. La séquence visée s'arrête à 9 : 53.

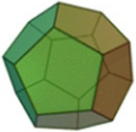
Représentation d'un hypercube

- projections
- sections successives
- patron



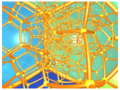
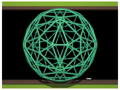


Polytopes réguliers

Les cinq polyèdres réguliers convexes (les 5 Solides de Platon)				
Tétraèdre	Hexaèdre ou Cube	Octaèdre	Dodécaèdre	Icosaèdre
				

Polytopes réguliers

Et en dimension 4 ?

- hypertétraèdre (ou *simplexe*) de dimension 4
- hypercube de dimension 4 (ou tesseract)
- hyperoctaèdre de dimension 4
- hypergranatoèdre (24 sommets)
- hyperdodécaèdre (120 sommets) 
  Cliquer pour voir le 120 *en projection stéréographique. La séquence visée s'arrête vers* 9 : 50*.*
- hypericosaèdre (600 sommets) 
  Cliquer pour voir les sections du 600 *à travers l'espace en* 3*D. La séquence visée s'arrête à* 8 : 47*.*

Polytopes réguliers

En dimension supérieure à 4 ?
Seulement trois polytopes réguliers : simplexes, hypercubes, hyperoctaèdres

Retour au problème du cochonnet

Définition d'une hypersphère

Dans $\mathbb{R}^n$, une hypersphère de centre C (un point de $\mathbb{R}^n$) et de rayon r (un nombre réel positif) est l'ensemble des points X de $\mathbb{R}^n$ tels que $d(C, X) = r$.

Retour au problème du cochonnet

- On se place dans un repère cartésien de dimension n
- On prend l'hypercube qui a pour sommets les points de coordonnées ± 1
- Les hypersphères qui généralisent les boules de pétanque sont de rayon 1 et centrées sur ces sommets
- On note l_n le rayon de la plus grande sphère dont le centre est l'origine et qui est tangente aux hypersphères
- On note d la longueur entre l'origine et l'un des sommets de l'hypercube. On a alors $l_n = d - 1$
- On sait calculer d : $d = \sqrt{n}$
- On a donc

$$l_n = \sqrt{n} - 1$$

Retour au problème du cochonnet

Calculons les premiers termes...

- $l_2 \simeq 0,4142$,
- $l_3 \simeq 0,7321$,
- $l_4 = 1$,
- $l_5 \simeq 1,2361$,
- $l_6 \simeq 1,4495$,
- $l_7 \simeq 1,6458$,
- $l_8 \simeq 1,8284$,
- $l_9 \simeq 2$,
- $l_{10} \simeq 2,1623$,
- $\ldots$

Sommaire

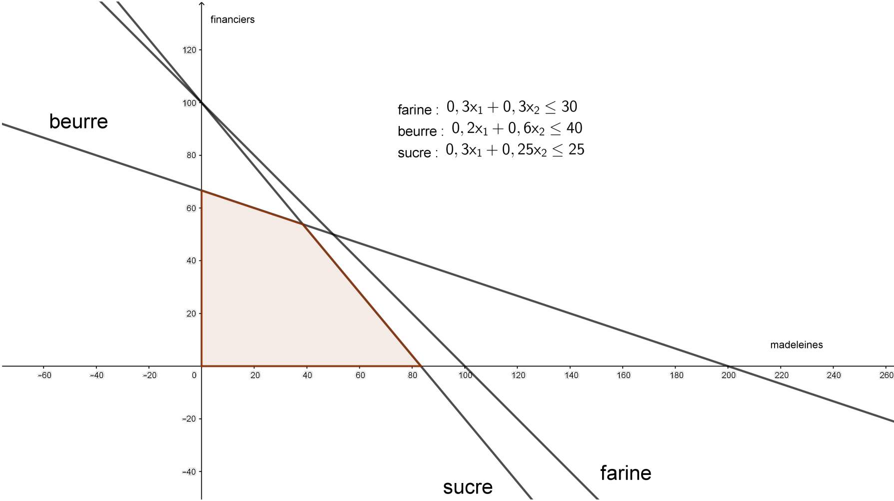
Exemple d'optimisation industrielle : un fabricant de gâteaux

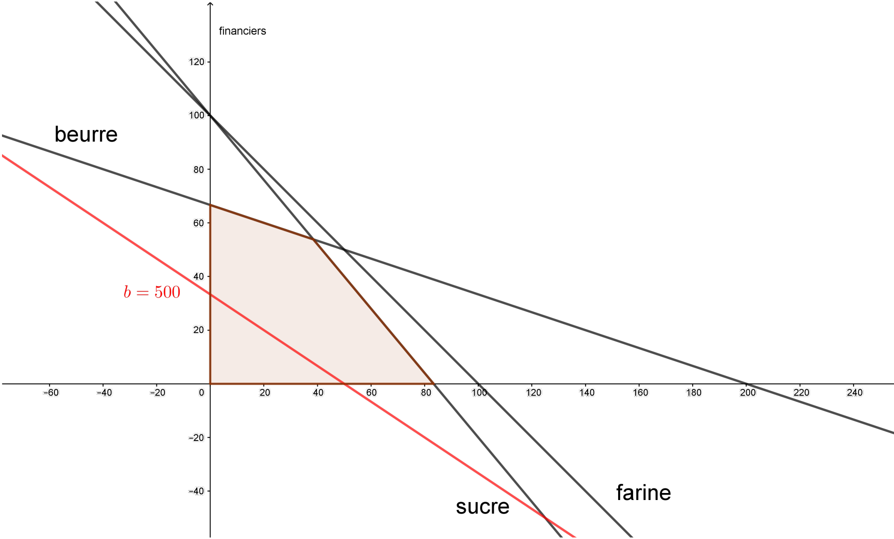
- Produits à vendre : madeleines et financiers
- Bénéfices :
  - 10 euros pour 1 kg de madeleines
  - 15 euros pour 1 kg de financiers
- Contraintes : ressources à utiliser

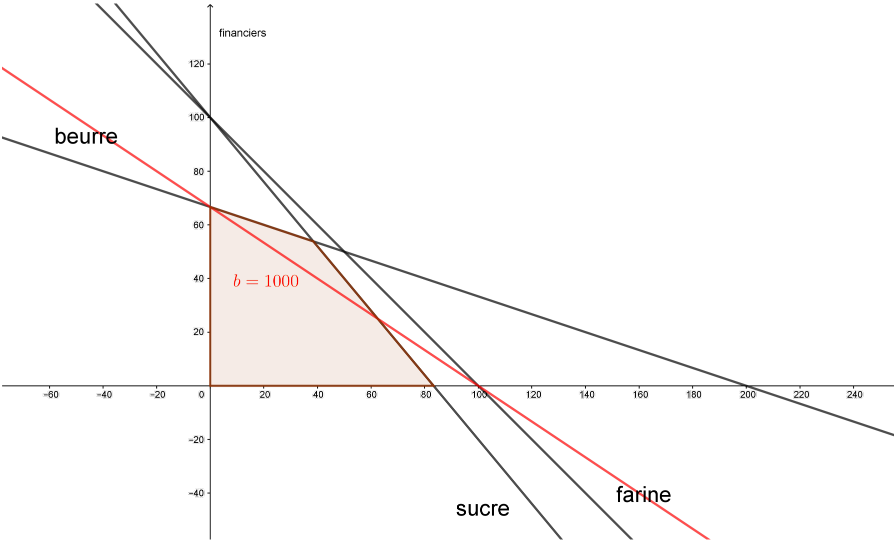
Ressources pour 1kg	Madeleines	Financiers	Stocks
Farine	$0,3$ kg	$0,3$ kg	30 kg
Beurre	$0,2$ kg	$0,6$ kg	40 kg
Sucre	$0,3$ kg	$0,25$ kg	25 kg

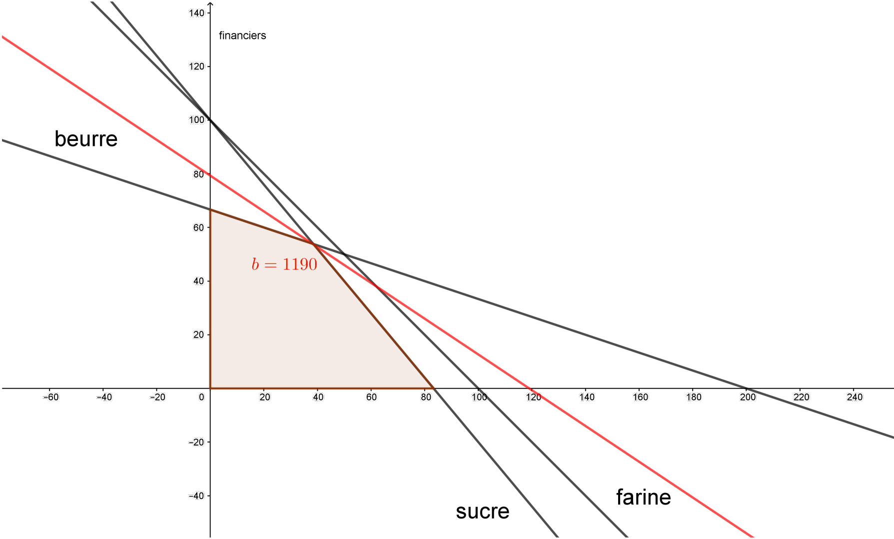
Modélisation du problème

- Espace à deux variables :
  - x_1 = quantité de madeleines produites
  - x_2 = quantité de financiers produits
- Fonction à optimiser : $b(x_1, x_2) = 10x_1 + 15x_2$
- Contraintes :
  - $0,3x_1 + 0,3x_2 \leq 30$
  - $0,2x_1 + 0,6x_2 \leq 40$
  - $0,3x_1 + 0,25x_2 \leq 25$


financiers
madeleines
beurre
sucre
farine
farine : $0,3x_1 + 0,3x_2 \leq 30$
beurre : $0,2x_1 + 0,6x_2 \leq 40$
sucre : $0,3x_1 + 0,25x_2 \leq 25$
120
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
260


financiers
beurre
$b = 500$
sucre
farine
120
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240


financiers
beurre
$b = 1000$
sucre
farine
120
100
80
60
40
20
-20
-40
-60
-40
-20
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240


financiers
beurre
$b = 1190$
sucre
farine
140
120
100
80
60
40
20
-20
-40
-60
-40
-20
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240

Sommaire

- film *Dimensions* de Jos Leys, Étienne Ghys, Aurélien Alvarez : http://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm
- De très bonnes chaînes de vulgarisation sur Youtube :
    - Micmaths (Mickaël Launay) : https://www.youtube.com/watch?v=LQFkUjYzOn8&list=PLNefH6S6myiOfykOcgIc2sYrpr1Zk5Mhi
    - 3blue1brown : http://www.3blue1brown.com/videos/2017/8/11/a-trick-to-visualizing-higher-dimensions
    - numberphile : https://www.youtube.com/watch?v=mceaM2_zQd8
- Encyclopédie des formes mathématiques remarquables : https://www.mathcurve.com/

Merci de votre attention !