Vers l'infini et au-delà...

Arthur Touati

4 décembre 2017

Séminaire "Maths Pour Tous"

Table des matières

Un infini de passions
peut tenir dans une minute.

Gustave Flaubert

Introduction

Il y a deux manières de rencontrer le concept d'infini en mathématiques. La première est l'infini des enfants : lorsqu'ils apprennent à compter, ils comprennent très vite que ce processus ne s'arrête pas ; quand on arrive à un certain nombre, on peut toujours lui rajouter 1 et en obtenir un strictement plus grand, et recommencer l'opération jusqu'à... l'infini ? Ici l'infini est un horizon, le point que l'on atteint si l'on ne s'arrête jamais d'avancer, on s'en approche tout en restant très loin.

La deuxième approche est ensembliste. La notion d'ensemble est la clé de voûte de tout l'édifice mathématique. Quand on manipule des ensembles, il est naturel de vouloir "compter" leurs éléments, de quantifier leur taille. Pour les ensembles de tailles finis c'est facile, mais les ensembles qui ne sont pas finis apparaissent naturellement en mathématiques et même dans la vie de tous les jours (repensez aux enfants apprenant à compter...). Dans cet exposé nous nous intéresserons à ce deuxième infini.

La question à laquelle répond cet exposé est la suivante : existe-t-il plusieurs infinis et peut-on dire qu'un infini est plus gros qu'un autre ? Dans la première partie nous allons expliquer la démarche apportant les outils mathématiques nécessaires pour répondre à notre question. Dans la deuxième partie nous allons présenter de manière intuitive ces outils mathématiques. Dans la troisième partie, nous rentrerons dans le vif du sujet en discutant du discret et du continu. Dans la dernière partie, nous montrerons qu'il existe en réalité une infinité d'infinis différents...

1 Du fini à l'infini

1.1 Les pièges du fini

Notre but dans cet exposé est de "compter", plus précisément nous nous proposons de "compter" les éléments d'un ensemble. Dans le cas des ensembles finis (c'est-à-dire ceux qui comportent un nombre finis d'éléments), la tâche semble facile : il nous suffit justement... de compter. Le fait que l'ensemble est fini nous assure que ce processus de comptage s'achève, on obtient donc un nombre, que l'on nomme le *cardinal de l'ensemble*.

Mais comment définir un ensemble fini ? On ne peut en fait pas dire, comme nous venons de le faire, qu'un ensemble est fini si son nombre d'éléments est fini. Cela sous-entendrait que le "nombre d'éléments d'un ensemble" est un objet que l'on peut définir pour n'importe quel ensemble et qu'il pourrait être infini. Or on ne peut pas parler du nombre d'éléments d'un ensemble infini...

Le nombre d'éléments ne peut donc pas être une notion discriminante pour la disjonction ensemble fini/ensemble infini, alors que notre intuition nous dit que c'est le cas. Il nous faut donc trouver une autre notion répondant aux deux objectifs suivants :

- cette notion doit pouvoir s'appliquer à tous les ensembles, et permettrait dans un second temps de différencier sans ambiguités les ensembles dits "finis" et "infinis", en accord avec notre intuition.
- cette notion doit généraliser le processus de comptage que l'on applique aux ensembles finis et doit nous permettre de comparer deux ensembles infinis.

Que cela soit dans une optique de définition ou de comparaison, notre nouvelle notion doit absolument s'appliquer à tous les ensembles et être cohérente avec notre intuition : par exemple l'ensemble $\{0, 1\}$ doit être fini et contenir deux éléments alors que $\mathbb{N}$ ne doit pas l'être, l'ensemble $\{0\}$ doit être "plus petit" que l'ensemble $\{\pi, \sqrt{2}\}$.

1.2 Les étiquettes et les flèches

Pour trouver cette nouvelle façon de voir les choses, nous allons réfléchir à ce que signifie la phrase "l'ensemble $\{A, B\}$ a deux éléments". Notre première intuition nous dit qu'on a compté ses éléments et que le résultat est 2, mais, comme on l'a vu précédemment, cette vision nous empêche de définir proprement le fini et nous empêche carrément de parler de l'infini...

Que fait-on lorsque l'on compte jusqu'a 2 ? on décrète qui est le numéro 1, on le met de côté, puis on décrète qui est le numéro 2, et on s'arrête puisque si on les mets tous les deux de côté il ne reste plus rien. On a en quelque sorte mis des étiquettes sur nos éléments. On peut aussi dire qu'on a associé à chaque élément de l'ensemble un numéro. C'est cette idée d'association qui est fondamentale.

Si maintenant on considère nos étiquettes comme un ensemble à part entière, l'opération "coller une étiquette" est remplacée par l'opération "tirer une flèche entre un élément et une étiquette", ou plus généralement, tirer une flèche entre les éléments de deux ensembles différents. Si on prends l'exemple de l'ensemble à deux éléments $\{A, B\}$, la phrase "le nombre d'éléments de cet ensemble est 2" est remplacée par la phrase "l'ensemble est mis en relation avec l'ensemble $\{1, 2\}$".

La question maintenant est : que doit vérifier cette mise en relation ? En effet, nous n'avons pas tiré les flèches au hasard, nous avons en fait suivi 4 règles sans même nous en rendre compte :

- **règle 1** : nous n'avons pas mis deux étiquettes sur le même élément, autrement dit, d'un élément de notre ensemble ne peut partir qu'une seule flèche.
- **règle 2** : nous n'avons pas oublié d'éléments, autrement dit, de tout élément part une flèche.
- **règle 3** : nous n'avons pas attribué à deux éléments différents la même étiquette, autrement dit, deux flèches ne peuvent avoir le même point d'arrivée.
- **règle 4** : nous n'avons pas oublié d'étiquettes, autrement dit, tous les numéros sont atteints par une flèche.

Ces règles d'associations d'éléments entre ensembles sont centrales en mathématiques et sont formalisées sous la notion de fonctions.

2 Ensembles et fonctions

2.1 Les fonctions

Soient E et F deux ensembles.

Définition 1. *Une fonction f ayant pour ensemble de départ E et ensemble d'arrivée F est un ensemble de flèches partant des éléments de E et arrivant sur les éléments de F respectant la **règle 1** et la **règle 2**.*

La fonction f va associer à chaque élément de E un élément de F, ce que l'on note $f : E \longrightarrow F$. Si on note les éléments de E et de F les uns en face des autres sur une feuille, on tire une flèche entre $x \in E$ et $y \in F$ si la fonction f associe y à x. On dit alors que y est **l'image** de x par f, ou encore que x est un **antécédent** de y par f, ce que l'on note $f(x) = y$.

2.2 Injectivité et surjectivité

Nous n'avons pas encore utilisé les deux dernières règles énoncées plus haut. Pour définir un processus de comptage satisfaisant, nous avons besoin de ces règles et de rafiner la notion de fonctions. Pour percevoir ce manque, prenons l'exemple suivant : si $E = \{\pi, \sqrt{2}\}$ et $F = \{1, 2\}$, on peut considérer la fonction $f : E \longrightarrow F$ définie par $f(\pi) = 1$ et $f(\sqrt{2}) = 1$, on a bien définit une fonction ne respectant pas les **règles 3 et 4**.

Définition 2. *Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est dite injective lorsqu'elle respecte la **règle 3**.*

Si une fonction est injective, chaque élément de l'ensemble d'arrivée admet au plus un antécédent par cette fonction. Cela revient à dire que deux éléments distincts de l'ensemble de départ ne peuvent pas être envoyés sur le même élément de l'ensemble d'arrivée. En termes de flèches, cela signifie que deux flèches distinctes ne peuvent pas avoir le même point d'arrivée.

Définition 3. *Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est dite surjective lorsqu'elle respecte la* ***règle 4****.*

Cela revient à dire que tous les éléments de l'ensemble d'arrivée sont atteints par la fonction. En termes de flèches, cela signifie que tous les éléments sont atteints par au moins une flèche.

Les notions d'injectivité et de surjectivité n'ont a priori rien à voir entre elles : une injection peut ne pas être surjective et réciproquement. Par contre, les fonctions qui sont injectives et surjectives à la fois sont tellement importantes qu'on leur a donné un nom :

Définition 4. *Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est dite bijective lorsqu'elle est injective et surjective.*

Cela revient à dire que tous les éléments de l'ensemble de départ ont un unique antécédent. Concrètement, cela signifie que deux flèches n'arrivent jamais au même endroit (à cause de l'injectivité) et que tous les éléments de l'ensemble de départ sont atteints par une flèche. Pour reprendre notre exemple, si $E = \{\pi, \sqrt{2}\}$ et $F = \{1, 2\}$, on peut considérer la fonction $f : E \longrightarrow F$ définie par $f(\pi) = 1$ et $f(\sqrt{2}) = 2$, cette fonction est bien bijective.

C'est la notion de fonction bijective que nous allons choisir pour quantifier les éléments d'un ensemble, car ce sont les fonctions bijectives qui vérifient les **règles 1**, **2**, **3** et **4** à la fois. S'il existe une bijection entre deux ensemble E et F, chaque élément de E à un jumeau unique dans l'ensemble F, on a donc envie de dire que E et F ont le même "nombre" d'éléments.

De plus, dans les définitions précédentes, à aucun moment nous avons eu besoin du caractère fini ou infini des ensembles E et F que nous considérions. Cette notion peut donc s'appliquer à tous les ensembles, et c'est exactement ce que nous recherchions !

2.3 Subpotence et équipotence

Armés de l'injectivité et de la bijectivité, nous pouvons énoncer les définitions suivantes.

Définition 5. *On dit que deux ensembles E et F sont équipotents s'il existe une bijection entre eux.*

La relation d'équipotence entre deux ensembles correspond à notre intuition d'avoir "le même nombre d'éléments" ou d'être de "même taille" ; l'avantage ici est qu'on peut définir des bijections entre ensembles infinis.

Exemple 1. *On peut définir la fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ par $f(n) = n$, on peut vérifier qu'elle est bijective. On obtient donc que $\mathbb{N}$ est équipotent à lui-même, ou que $\mathbb{N}$ a autant d'éléments que lui-même, ce n'est pas un résultat très intéressant mais le fait d'avoir un cadre conceptuel capable d'énoncer cette banalité est très satisfaisant.*

Cette définition est cohérente avec le cas fini. En effet si deux ensembles E et F finis ont même nombre d'éléments, on peut construire une bijection entre eux de la manière suivante : on numérote chacun des éléments de E puis de F, et on envoie le n-ième élément de E sur le n-ième élément de F ; si les deux ensembles ont le même nombre d'éléments, cette application sera bien une bijection.

Nous pouvons enfin définir ce qu'est un ensemble fini :

Définition 6. *Soit E un ensemble :*

1. *E est dit fini s'il est équipotent à un ensemble de la forme $\{1, \ldots, n\}$ pour un entier naturel quelconque, cet entier est unique et on l'appelle le cardinal de E.*
2. *E est dit infini s'il n'est pas fini.*

Ces deux définitions peuvent sembler triviales, mais ce qui compte en mathématiques, c'est de construire un langage dans lequel on peut les énoncer sans ambiguités...

Le but premier de cet exposé est de montrer l'existence de plusieurs infinis, c'est-à-dire d'être capable de dire qu'un infini est plus "petit" qu'un autre, nous avons donc besoin de la définition suivante :

Définition 7. *On dit qu'un ensemble E est subpotent à un autre ensemble F s'il existe une injection de E dans F.*

Si E est subpotent à F, c'est que E est plus petit que F, ou que E a "moins d'éléments" que F. Encore une fois cette définition a encore un sens lorsque l'on parle d'ensembles infinis.

Exemple 2. *Si on considère la fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n$, cette fonction est injective mais non surjective, l'ensemble $\mathbb{N}$ est donc subpotent à $\mathbb{Z}$. Nous n'avons par contre pas prouvé qu'ils n'étaient pas équipotents, ce n'est pas parce que cette fonction n'est pas bijective qu'il n'existe pas de bijections entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, ils se pourraient que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ aient la même taille...*

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer nos premiers résultats sur les ensembles infinis et de découvrir quelques uns des jolis paradoxes que renferment les mathématiques.

3 Le discret et le continu

Dans cette partie nous allons nous intéresser à deux infinis différents, appelés couramment le discret et le continu. On les rencontre dans la vie de tous les jours :

— si on regarde l'ensemble des nuances de couleurs d'un arc-en-ciel, on a l'intuition qu'il y en a une infinité, et que ces nuances forment un continuum.

— considèrons l'ensemble des phrases correctes que l'on peut écrire dans la langue française, il y en a bien une infinité (on peut en écrire d'aussi longues que l'on veut), mais notre intuition nous dit qu'elles ne forment pas un continuum, qu'on peut les ranger l'une après l'autre, cet infini correspond à l'infini discret.

Dans la partie 3.3, nous expliquerons pourquoi ces deux infinis sont si importants en mathématiques.

3.1 La dénombrabilité

Nous allons commencer par nous intéresser à l'infini discret, qui correspond à tous les ensembles équipotents à $\mathbb{N}$.

Définition 8. *Un ensemble E est dit dénombrable s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.*

Concrètement, un ensemble dénombrable peut se mettre sous la forme d'une liste infinie où on a attribué un numéro à chaque élément. Si E est un ensemble dénombrable, par définition de l'équipotence il existe une bijection $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$, cette bijection effectue l'opération "on associe à chaque élément de E un numéro". On peut alors dire que E est l'ensemble $\{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$.

Dans la suite, nous allons étudier les ensembles suivants :
— l'ensemble $\mathcal{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ des entiers naturels pairs.
— l'ensemble $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ des entiers relatifs.
— l'ensemble $\mathbb{N}^2 = \{(n, m) \mid n \in \mathbb{N},\, m \in \mathbb{N}\}$ des couples d'entiers naturels.

Proposition 1. *$\mathcal{P}$ est dénombrable.*

Démonstration. Il faut d'exhiber une bijection $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}$. Le choix naturel est $f(n) = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette fonction est injective car si $f(n) = f(m)$, alors $2n = 2m$ et en simplifiant par 2 on obtient $n = m$; elle est surjective par définition de $\mathcal{P}$. □

Notre première intuition au sujet de $\mathcal{P}$ est qu'il a deux fois moins d'éléments que $\mathbb{N}$ vu que pour construire $\mathcal{P}$ à partir de $\mathbb{N}$, on a enlevé un élément sur deux. Cette première intuition est donc fausse et il y a autant d'entiers naturels pairs que d'entiers naturels.

Proposition 2. *$\mathbb{Z}$ est dénombrable.*

Démonstration. On va exhiber une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. L'expression explicite de cette bijection n'est pas très importante, ce qui compte c'est le processus de comptage qu'elle traduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ 1 &\longmapsto 1 \\ 2 &\longmapsto -1 \\ 3 &\longmapsto 2 \\ 4 &\longmapsto -2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

L'expression exacte de la fonction f qui l'effectue est :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ & & n & \mapsto & (-1)^{n+1} \times \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \end{array} \tag{1}$$

On peut vérifier que f est bijective. □

De la même manière que pour $\mathcal{P}$, notre intuition est un peu bousculée, en effet pour construire $\mathbb{Z}$, on a rajouté à chaque entier naturel son opposé. Pourtant, il y a autant d'entiers relatifs que d'entiers naturels.

On vient de rencontrer un phénomène intéressant qui ne se produit uniquement lorsqu'on traite d'ensembles infinis : $\mathcal{P}$ est strictement inclus dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire que $\mathcal{P}$ est inclus dans $\mathbb{N}$ mais qu'il ne lui est pas égal), et pourtant ils ont autant d'éléments, on a donc un exemple de tout qui a autant d'éléments qu'une partie.

Nous allons montrer un résultat encore plus surprenant :

Proposition 3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$ *est dénombrable.*

Démonstration. Comme dans la démonstration précédente ce n'est pas l'expression de la bijection qui est essentielle mais le processus de comptage. Plusieurs stratégies s'offre à nous : on peut commencer à compter la "première copie" de $\mathbb{N}$, mais on ne reviendra jamais au début pour commencer la deuxième... L'astuce est la suivante : on compte selon les diagonales ! De cette façon, on est certain de n'oublier aucun point du plan.

On peut montrer que la réciproque de la bijection correspondante est :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ & & (n,m) & \mapsto & \frac{1}{2}\left((n+m)^2 + n + 3m\right) \end{array} \tag{2}$$

□

Attardons-nous sur ce résultat. L'ensemble $\mathbb{N}$ peut être représenté sur un axe gradué où on met une marque à chaque entier naturel ; l'ensemble $\mathbb{N}^2$ correspond lui à tous les noeuds d'une grille qui se trouverait dans le coin supérieur gauche d'un tableau muni de deux axes gradués. Intuitivement, le cardinal de $\mathbb{N}^2$ semble donc être "infiniment" plus grand que celui de $\mathbb{N}$, vu que pour construire $\mathbb{N}^2$ à partir de $\mathbb{N}$, on a empilé jusqu'à l'infini des "copies" de $\mathbb{N}$. Ce résultat est donc plus fort que les deux résultats précédents (qui montrent que multiplier ou diviser le "cardinal" de $\mathbb{N}$ par 2 ne change rien), ici on multiplie le "cardinal" de $\mathbb{N}$ par *lui-même*, et cela ne change toujours rien.

Il faut préciser ici que nous ne faisons que comparer des ensembles. Dans le cadre formel construit plus haut, nous sommes juste capables de dire si deux ensembles ont autant d'éléments, ou si un ensemble a moins d'éléments qu'un autre. Nous ne sommes pas capable de dire "combien" d'éléments a l'ensemble $\mathbb{N}$. Georg Cantor, mathématicien de la fin du XIXème siècle, qui peut être considéré comme le créateur de la théorie des ensembles moderne, a construit une théorie dans laquelle cette question a un sens et une réponse, il a étendu le concept de cardinal aux ensembles infinis, ce que nous ne faisons pas ici.

3.2 La puissance du continu

Nous allons maintenant nous intéresser à l'infini continu, notre objectif principal est de montrer qu'il est strictement "plus gros" que l'infini discret, ce qui répondra partiellement à l'objectif premier de cet exposé, à savoir qu'il existe plusieurs infinis. Les deux ensembles qui vont nous intéresser sont :

— l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, on le représente souvent comme une droite continue, où chaque point représente un nombre réel, c'est pour cette qu'on parle souvent de droite réelle. Cet ensemble contient, par exemple, des nombres aussi bizarres que $\sqrt{2}$ ou π.
— l'intervalle $]0,1[$, qui est constitué de tous les nombres réels compris strictement entre 0 et 1.

Notre premier objectif est de montrer que ces deux ensembles sont en bijection, c'est-à-dire qu'il existe une bijection $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$.

Proposition 4. $\mathbb{R}$ *et* $]0,1[$ *sont équipotents.*

Démonstration. L'expression exacte de la fonction n'est pas essentielle, c'est le dessin qui l'est. Pour les matheux, la formule est $f(x) = \tan\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$. $\square$

Ce résultat est en soi intéressant, il nous dit qu'il y a autant d'éléments dans un intervalle que sur toute la droite réelle (encore une fois on rencontre le cas où un ensemble est équipotent à une de ses parties). Cela donne un nouvel éclairage (quoiqu'un peu froid) sur la citation de Flaubert : si considère que le temps peut être représenté par la droite réelle, cela nous dit qu'on vit autant d'instants en une minute que pendant toute notre vie, ou autant qu'un être immortel...

Nous voulons montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ ne sont pas équipotents, or $\mathbb{R}$ et $]0,1[$ le sont, il nous suffit donc de montrer que $]0,1[$ et $\mathbb{N}$ ne le sont pas !

Théorème 1. $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

La découverte et la démonstration de ce théorèmes sont dues à Cantor (il le démontre une première fois en 1874 avec des arguments compliqués d'analyse, et le démontre de manière plus astucieuse en 1891, c'est cette deuxième démonstration que nous présentons).

Démonstration. Comme nous l'avons dit, il nous suffit de montrer que $]0,1[$ et $\mathbb{N}$ ne sont pas équipotents. Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence d'une bijection f entre $\mathbb{N}$ et $]0,1[$. On sait que chaque réel admet un unique développement décimal, qui prend la forme d'une suite infinie de chiffres. On écrit le développement décimal des $f(m)$ pour $m \in \mathbb{N}$, par exemple :

$$f(1) = 0,\boxed{1}234\ldots \tag{3}$$
$$f(2) = 0,5\boxed{6}78\ldots \tag{4}$$
$$f(3) = 0,91\boxed{0}1\ldots \tag{5}$$
$$f(4) = 0,112\boxed{1}\ldots \tag{6}$$
$$\vdots \tag{7}$$

Nous allons construire un élément x de $]0,1[$ qui ne peut pas être dans la liste ci-dessus, autrement il n'est pas atteint par la fonction f, ce qui contredit sa surjectivité. On construit le nombre x de la manière suivante : si la n-ième décimale de $f(n)$ est 1, alors la n-ième décimale de x est 2 ; si la n-ième décimale de $f(n)$ est différente de 1, alors la n-ième décimale de x est 1. Dans l'exemple ci-dessus, $x = 0,2112\ldots$.
Le nombre x est bien un élément de $]0,1[$ et ne peut pas être égal à un $f(n)$, pour n un entier naturel, en effet la n-ième décimale de x et de $f(n)$ sont différentes par construction. Cela contredit la surjectivité de f et cela montre que $]0,1[$ n'est pas dénombrable. $\square$

On a montré que l'infini qui caractérise $\mathbb{R}$ est strictement plus "gros" que celui caractérisant $\mathbb{N}$, autrement dit il y a strictement plus de nombres réels que de nombres entiers. On a bien montré l'existence de deux infinis différents et grâce aux outils mis en place, nous avons pu montré qu'ils étaient différents. Pour revenir à notre exemple initial, il y a plus de nuances dans l'arc-en-ciel que de phrases dans la langue française !

Par des arguments différents, on peut montrer que $\mathbb{R}$,$\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont équipotents, c'est-à-dire qu'il y a autant de "points" dans l'espace, dans le plan et sur la droite réelle... pour être encore plus spectaculaire, il y a autant de points sur une règle de 20 cm que dans tout l'univers !

3.3 L'hypothèse du continu

Il est légitime de se demander pourquoi $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ sont les premiers ensembles auxquels on pense lorsqu'on parle d'infini. Pour $\mathbb{N}$, la raison est la suivante :

Proposition 5. *Si un ensemble E est infini, alors $\mathbb{N}$ lui est subpotent.*

Démonstration. Nous allons montrer les deux sens de l'équivalence l'un après l'autre. Si E est infini, construisons l'injection $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$ par récurrence forte :

— initialisation : pour la valeur de $f(0)$, on choisit n'importe quel élément de E (qui est bien non-vide s'il est supposé infini).

— hérédité : si les $f(m)$ pour $m \in \{1, \ldots, n\}$ sont construits de manière injective, alors $E \backslash \{f(i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ est non-vide (car sinon, E serait fini), on peut choisir $f(n+1)$ dedans.

Si maintenant il existe une injection $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$, montrons par l'absurde que E est infini. S'il est fini, on peut considérer son nombre d'éléments, qu'on note $N \in \mathbb{N}$. Considérons l'ensemble $\{f(i) \mid i = 1, \ldots, N+1\}$, par définition de f il est inclus dans E mais par injectivité il contient $N+1$ éléments, ce qui est absurde. $\square$

Cette proposition nous dit que si un ensemble est infini, il contient au moins une copie de $\mathbb{N}$. Autrement dit, le cardinal de $\mathbb{N}$ est le plus "petit" infini qui soit !

Nous avons vu que $\mathbb{R}$ est strictement plus "gros" que $\mathbb{N}$. après avoir démontrer ce résultat, Cantor s'est demandé s'il existait un ensemble "entre les deux", c'est-à-dire un ensemble strictement plus gros que $\mathbb{N}$ et strictement plus petit que $\mathbb{R}$. Cantor formula alors ce qu'on appelle encore aujourd'hui l'hypothèse du continu : il n'existe pas de tel ensemble. Il s'efforça en vain de démontrer son hypothèse. Si on admet pour l'instant que l'hypothèse du continu est vraie, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ensemble entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$, cela signifie que $\mathbb{R}$ est le "deuxième" infini, $\mathbb{N}$ étant le premier car le plus petit.

Durant le XXème siècle, les premières démonstrations sur les systèmes d'axiomes ont vu le jour, les logiciens ont développés des méthodes permettant de démontrer (par exemple) qu'un système d'axiomes ne peut pas démontrer des résultats contradictoires, ou ne peut pas démontrer tel théorème, et même qu'un système d'axiomes ne peut pas démontrer lui-même sa propre cohérence... En ce qui concerne l'hypothèse du continu, Gödel a montré en 1938 que les axiomes des mathématiques modernes ne peuvent prouver qu'elle est fausse ; Cohen a lui montré en 1963 que ces mêmes axiomes ne peuvent pas prouver qu'elle est vraie. L'hypothèse du continu est donc indécidable dans les mathématiques modernes, on ne peut ni prouver qu'elle est fausse, ni prouver qu'elle est vraie, autrement dit on peut choisir de la rajouter ou non à nos chers axiomes.

4 Et au delà ?

4.1 Une infinité d'infinis...

Nous venons de rencontrer deux infinis différents, la question que l'on se pose tous est : en existe-t-il d'autres ? La réponse est oui, et on peut même en construire une infinité... Nous allons décrire ce procédé.

Partant d'un ensemble E, nous aimerions pouvoir en construire un de manière systématique et qui soit à coup sûr strictement plus gros que E. Cet ensemble doit au moins contenir tous les éléments de E, et ensuite que rajoute-t-on ? Nous n'avons plus rien à notre disposition vu que nous avons déjà mis tous les éléments de E, il nous vient alors l'idée de les regrouper par paquets et de rajouter ses paquets dans notre nouvel ensemble...

Ce qu'on est en train de construire, c'est l'ensemble des sous-ensembles de E, qu'on note $\mathcal{P}(E)$ en mathématiques. Donnons des exemples dans le cas d'ensembles finis :

— si $E = \{1, 2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

— si $E = \{1, 2, 3\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

On peut prouver que si E est ensemble fini à n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ est aussi un ensemble fini à 2^n éléments. Dans ce cas, $\mathcal{P}(E)$ est bien strictement plus gros que E.

Mais qu'en est-il dans le cas infini ? Est-il possible que $\mathcal{P}(E)$ soit équipotent à E ? La réponse est donné par le théorème suivant, datant de 1891 et démontré par Cantor.

Théorème 2. *Si E est un ensemble non-vide, alors E est strictement subpotent à $\mathcal{P}(E)$.*

Démonstration. Montrons que E est subpotent à $\mathcal{P}(E)$: l'application qui à $x \in E$ associe $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$ est clairement injective. Montrons que E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas équipotents. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une fonction $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ bijective. Le génie de Cantor est de considérer l'ensemble suivant :

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\} \tag{8}$$

De par sa construction, $A \in \mathcal{P}(E)$, il admet donc un antécédent $a \in E$ par f (car f est surjective, car bijective), c'est-à-dire $f(a) = A$. Il n'y a que deux possibilités :

— si $a \in A$, alors par définition de A, $a \notin f(a)$. Or $f(a) = A$ et on aurait donc $a \notin A$, ce qui contredit notre hypothèse.

— si $a \notin A$, alors par définition de A, $a \in f(a)$. Or $f(a) = A$ et on aurait donc $a \in A$, ce qui contredit notre hypothèse.

Dans tous les cas nous aboutissons à une absurdité, ce qui signifie que E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas équipotents. □

L'existence même de $\mathcal{P}(E)$ pour tout ensemble E n'est pas évidente en soi et est en fait un axiome de la théorie des ensembles, son unicité résulte d'un autre axiome. Ce théorème a une conséquence intéressante : il n'existe pas d'ensembles E qui soit plus gros que tous les autres ensembles, en effet s'il existerait, $\mathcal{P}(E)$ existerait aussi et le théorème contredirait la maximalité de E.

Si on applique ce théorème à notre ensemble infini préféré, on obtient que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est strictement plus gros que $\mathbb{N}$, il correspond donc à un infini strictement plus gros que celui de $\mathbb{N}$, il n'est pas dénombrable. On peut d'ailleurs montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est en bijection avec $\mathbb{R}$, il correspond donc à l'infini continu.

On a réussit à construire un infini plus gros qu'un autre, rien ne nous empêche de continuer ! En effet $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble et on peut lui appliquer le théorème de Cantor : par exemple si on prend $E = \mathbb{N}$, on considère la suite d'ensembles $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$ etc. On obtient une infinité d'infini, qu'on peut qualifier d'ordre 2, on peut là aussi poursuivre le processus et considérer des infinis d'ordre 3 et ainsi de suite jusqu'à des infinis d'ordre... infini ? Allez savoir !

4.2 Conclusion

La situation que nous venons de rencontrer est fréquente, voire systématique, en mathématiques. Nous sommes partis de l'intuition que nous avons sur un objet abstrait : les ensembles finis et infinis. Nous avons essayé de définir un cadre conceptuel "naturel" pour énoncer sans ambiguités nos intuitions. Ce cadre conceptuel nous a permis dans un second temps de découvrir de nouvelles propriétés étonnantes et qui vont presque à l'encontre de notre première intuition. Ce processus d'intéraction entre notre intuition et le cadre conceptuel qui est, selon moi, l'essence des mathématiques, et qui fait (presque) de ce champ de recherche une science humaine.