

Comment démontrer un théorème en le dessinant sur sa fenêtre ?

Cécile Gachet

2 octobre 2017

Maths



Pour Tous

Séminaire "Maths Pour Tous"

Table des matières

1 Énoncé du théorème et premières remarques	2
1.1 Un premier énoncé de géométrie affine	2
1.2 Un énoncé cependant incomplet	3
2 Un point de vue pertinent : la géométrie projective	4
2.1 Un jeu de mot qui fait sens	5
2.2 Du particulier au général : l'art des transformations géométriques	7
2.3 Votre première transformation projective	9
2.4 La preuve du théorème de Pappus généralisé	11
3 Et après ?	11
3.1 Pascal (1623-1662) et l'astronomie	12
3.2 Poncelet (1788-1867) et la dualité	13
3.3 R. Schwartz (1966-) et les systèmes dynamiques	13

Introduction

Collégiens, parents d'élèves, professeurs et inspecteurs en charge des programmes scolaires s'accordent souvent sur un objectif : bannir la géométrie, rébarbative et calculatoire, de l'enseignement des mathématiques.¹ Qu'il soit question de mathématiques ou particulièrement de géométrie, les idées reçues et les rancœurs d'écoliers pullulent, et on m'a souvent apostrophée : « Vous voulez être mathématicienne ? Alors, vous savez prouver le théorème de Pythagore ? Vous savez, moi, le théorème de Pythagore. . . » Ainsi, la géométrie semble traumatiser une partie de la société, et n'être digne que du mépris de l'autre partie, plus éclairée, pour laquelle tout problème de géométrie peut se retraduire en calculs et se résoudre par la force brute.

Chateaubriand ne déroge donc pas à l'usage quand il écrit, dans *Le génie du christianisme*, livre 2, chapitre 1 :

Il y a une géométrie matérielle qui se compose de lignes, de points, d' $A + B$; avec du temps et de la persévérance, l'esprit le plus médiocre peut y faire des prodiges. C'est alors une espèce de machine géométrique qui exécute d'elle-même des opérations compliquées, comme la machine arithmétique de Pascal. [. . .] Entêtés dans leurs calculs, les géomètres ont un mépris ridicule pour les arts de l'imagination [. . .].

Dans cette séance, on va à l'encontre de la thèse de Chateaubriand : la géométrie est une branche splendide des mathématiques, qui pour faire face à des problèmes profonds érige des preuves ingénieuses, développe des arguments inattendus, appelle de ses vœux des théories subtiles, . . . Bref, c'est une science à part entière qui évolue sans cesse. Par exemple, on se propose de présenter ici un principe de raisonnement très puissant, dit « projectif », qui permet d'appréhender certains énoncés géométriques sous un jour nouveau. L'idée est la suivante : à partir du moment où un théorème ne fait pas intervenir d'objets trop compliqués (c'est-à-dire qu'il peut se formuler en termes de droites et de points, sans parler de milieux, d'égalités de longueurs, de cercles, . . .), on peut changer le point de vue qu'on a sur le théorème d'une manière qui le rend immédiatement plus

1. Je suis un peu défaitiste : le goût de la géométrie n'a pas complètement disparu, comme en témoigne un superbe plaidoyer rédigé par la commission Kahane en 2011, disponible sur le site de l'académie d'Aix-Marseille.

facile à prouver. Dans cet exposé, on se propose de donner un exemple de raisonnement projectif. Dans un premier temps, on énonce un théorème de géométrie tout ce qu'il y a de plus banal, le théorème dit de Pappus (dû au mathématicien grec Pappus d'Alexandrie, IV^e siècle avant notre ère). Dans un deuxième temps, on explique comment, en dessinant la figure de ce théorème sur une fenêtre, on change de point de vue et on simplifie le problème ; on profite de cette introduction au raisonnement projectif pour démontrer le théorème de Pappus. Enfin, dans un troisième temps, on expose sans démonstration quelques résultats intéressants qui apparaissent dans le sillage du théorème de Pappus.

1 Énoncé du théorème et premières remarques

1.1 Un premier énoncé de géométrie affine

Voici le théorème qu'on se propose de démontrer.

Théorème de Pappus Soient g, h deux droites. Soient A, C, E trois points de g et B, D, F trois points de h . On suppose que les droites (AB) et (DE) se coupent en I , les droites (BC) et (EF) en J et les droites (CD) et (FA) en K . Alors les points I, J, K sont alignés.

Remarque : on peut reformuler le théorème de la façon suivante : alignons trois points A, C, E d'une part et trois points B, D, F d'autre part, puis traçons la ligne brisée reliant les points A, B, C, D, E, F , $A : ABCDEF$ est un hexagone (qui a dit que les côtés d'un hexagone ne pouvaient pas se couper ?). Le théorème de Pappus nous dit que les intersections de ses côtes opposés sont trois points alignés.

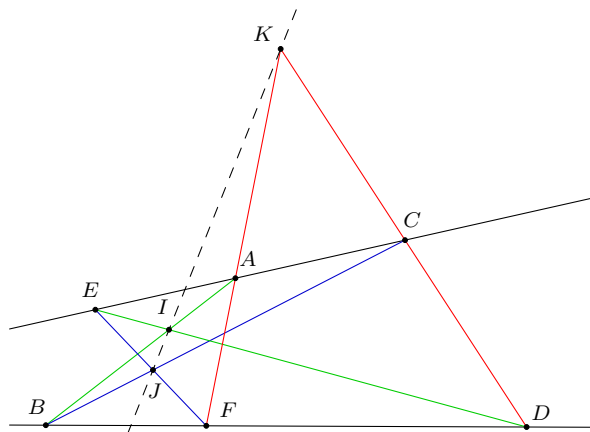



FIG 1.— Théorème de Pappus

Ce théorème est, en un sens, « simple » à énoncer puisqu'il ne fait intervenir pour tous objets que des droites et des points et pour toutes notions mathématiques que l'appartenance d'un point à une droite.

 **Définition** Faire de la géométrie, c'est travailler avec des objets géométriques comme les droites, les points, les cercles, les distances... qu'on a muni d'un certain nombre d'axiomes.² C'est très vaste, et c'est pour cela qu'il y a beaucoup de types de géométrie différents !

Par exemple, la *géométrie affine* étudie uniquement des ensembles de droites et de points liés par des relations d'alignement (pour les points) et de concours (pour les droites), et elle s'attache à démontrer des coïncidences, c'est-à-dire de nouveaux alignements de points ou concours de droites.

2. c'est-à-dire de propriétés basiques qu'on ne prouve pas, mais qu'on pose comme point de départ de la théorie.

Elle utilise un axiome, qui est à la base de toutes ses preuves, et qu'on présentera dans la section 1.2. Le théorème de Pappus est un exemple d'énoncé de géométrie affine.

La *géométrie euclidienne* utilise, en plus, la notion de distance (et donc notamment la notion de cercle, qu'on peut définir avec la distance,³ la notion de repère orthonormé et de coordonnées...): c'est essentiellement la géométrie qu'on étudie au collège. Elle utilise plusieurs axiomes, dits les axiomes d'Euclide, qui ont été fixés par le célèbre mathématicien grec il y a deux millénaires. Par exemple, le théorème de Pythagore est un théorème de géométrie euclidienne.

1.2 Un énoncé cependant incomplet

Dans l'état actuel des choses, notre théorème manque un peu de généralité : si les droites (AB) et (DE) ne se coupent pas, autrement dit si elles sont parallèles, le point I n'existe pas ! Et alors, adieu, veau, vache, cochon... Le théorème de Pappus ne s'applique plus.

Cependant, le-a géomètre curieux-se s'interroge : peut-on compléter le théorème de Pappus par d'autres théorèmes, afin de parvenir à des conclusions dans chaque cas de figure (que les points I, J, K d'intersections de nos diverses paires de droites existent ou non) ? De fait, on va montrer, en même temps que le théorème de Pappus, les résultats suivants :

On peut envisager un premier cas de figure : quand un point d'intersection (mettons K) n'existe pas, autrement dit quand on a un couple de droites parallèles ((CD) et (FA) en l'occurrence).

Premier complément au théorème de Pappus Soient g, h deux droites. Soient A, C, E trois points de g et B, D, F trois points de h . On suppose que les droites (AB) et (DE) se coupent en I , que (BC) et (EF) se coupent en J et que (CD) et (FA) sont parallèles. Alors la droite (IJ) est parallèle à (CD) et (FA) .

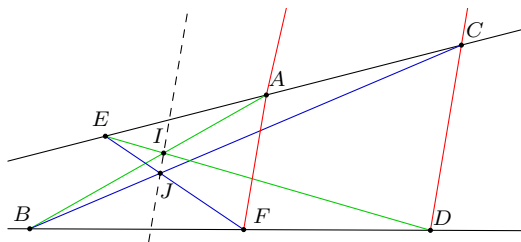


FIG 2.— Premier complément au théorème de Pappus

On peut envisager un deuxième cas de figure : quand exactement deux des points d'intersection (mettons I et J) n'existent pas, et un troisième cas de figure : quand aucun point d'intersection n'existe (autrement dit (AB) parallèle à (CD) , (BC) parallèle à (EF) et (CD) parallèle à (FA)). En pratique, le deuxième cas de figure ne peut pas avoir lieu, comme le dit l'énoncé suivant.

Second complément au théorème de Pappus Soient g, h deux droites. Soient A, C, E trois points de g et B, D, F trois points de h . On suppose que (AB) et (DE) d'une part, que (BC) et (EF) d'autre part sont parallèles. Alors les droites (CD) et (FA) sont parallèles.

3. un cercle est défini par le choix d'un point O et d'un rayon r , comme l'ensemble des points à distance r de O .

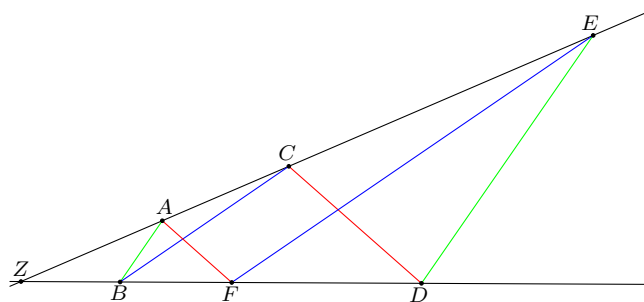


FIG 3.— Second complément au théorème de Pappus : si g et h se coupent en Z

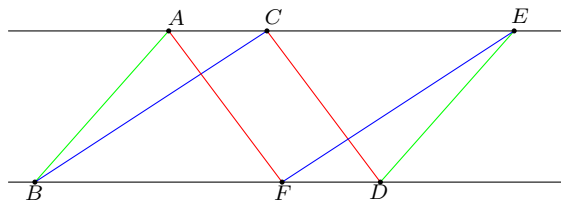


FIG 4.— Second complément au théorème de Pappus : si g et h sont parallèles

Si on parvient à montrer le théorème et ces compléments, on a couvert tous les cas de figure puisque :

- si les trois points I, J, K existent, le théorème de Pappus s'applique ;
- si exactement deux de ces trois points existent, le premier complément s'applique ;
- si au plus un de ces trois points existe, en fait, le second complément s'applique et finalement aucun de ces trois points n'existe.

Par ailleurs, on sait démontrer ce second complément.

Preuve du second complément : si les droites g et h se coupent, on nomme Z leur point d'intersection. D'après le théorème de Thalès,

$$(AB) \text{ parallèle à } (DE) \text{ donc } \frac{ZA}{ZE} = \frac{ZB}{ZD}$$

$$(BC) \text{ parallèle à } (EF) \text{ donc } \frac{ZE}{ZC} = \frac{ZF}{ZB}$$

En multipliant ces deux égalités, il vient $\frac{ZF}{ZD} = \frac{ZA}{ZC}$, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, (CD) et (FA) sont parallèles.

Si les droites g et h sont parallèles, les quadrilatères $ABDE$ et $BCEF$ ont chacun leurs côtés opposés parallèles deux à deux, donc ce sont des parallélogrammes. Donc leurs côtés opposés sont de même longueur, d'où $AC = AE - CE = BD - BF = FD$, donc $CDF A$ a deux côtés opposés ($[AC]$ et $[FD]$) parallèles de même longueur, donc c'est un parallélogramme. Ainsi, ses deux autres côtés, $[CD]$ et $[FA]$ sont parallèles. \square

2 Un point de vue pertinent : la géométrie projective

Les distinctions de cas faites dans la section précédente peuvent sembler bien fastidieuse. Il s'agit, à chaque fois qu'on veut définir un point d'intersection, de distinguer deux cas : le cas

où le point d'intersection existe et le cas où il n'existe pas parce que les droites concernées sont parallèles.

Pour éviter les distinctions, on se propose donc un arrangement avec le langage : on va dire que deux droites qui sont parallèles se coupent en un *point à l'infini*. L'intuition qui se cache là-dedans est illustrée ici :

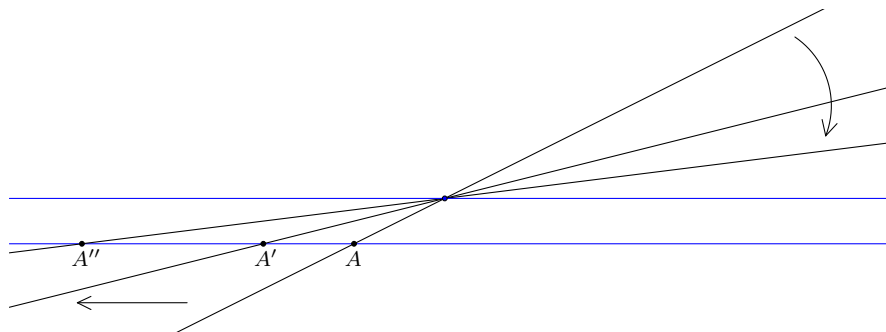


FIG 5.— Pendant que la direction de la droite du haut se rapproche de la direction fixée par la droite du bas, le point d'intersection des deux droites s'éloigne de plus en plus.

Avec cette nouvelle notion, adieu les disjonction de cas ! Deux droites sont toujours sécantes, que ce soit en un point du plan usuel ou en un point à l'infini.

2.1 Un jeu de mot qui fait sens

Maintenant, on n'a fait que jouer avec les mots en parlant de points à l'infini. On a juste remarqué qu'on aimerait « ajouter dans le plan » de nouveaux objets, qu'on appellerait des points à l'infini et qui vérifieraient la propriété intéressante suivante : pour tout couple de deux droites parallèles, il existerait un point à l'infini par lequel nos deux droites passeraient.

C'est maintenant le moment de se pencher sur la définition de la géométrie affine qu'on avait donnée dans la section 1.1 : on a déjà dit que faire de la géométrie affine, c'est travailler avec des points et des droites obéissant à quelques axiomes... mais on n'a jamais précisé ce qu'étaient des points et des droites dans le plan, ni même dans l'espace ! On n'a pas défini ces objets : c'est le moment de revenir sur ce point.

Depuis le début de cet exposé, on travaille dans le plan. Mais qu'est-ce que le plan ? Rappelons ce que nous dit Aristote dans le livre M de la *Métaphysique*, chapitre 2, paragraphe 1 :

Κατέπιπεδον γὰρ διαιρεθήσεται, καὶ τοῦτο [τὸ σῶμα] κατὰ γραμμὴν καὶ αὐτὴ κατὰ στιγμὴν.

Alors, en effet, le solide se diviserait par la surface, la surface par la ligne, la ligne par le point.

Si on détourne cette remarque d'Aristote au profit d'une définition, on peut dire qu'une surface se compose de lignes, qui sont constituées de points ; donc une surface est un ensemble de points organisés en droites.

Tout cela est bien beau, mais pour faire de la géométrie affine dans le plan, il nous manque toujours les axiomes. En l'occurrence, les fameux axiomes énoncés par Euclide dans ses *Éléments* sont amplement suffisants, et le premier de ces postulats suffit à bâtir la géométrie affine (les autres parlent de distance et servent à faire de la géométrie euclidienne) :

Ἡτήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημείον εὐθεΐαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

On supposera que, de tout point à tout point, on peut conduire une droite.

même si, en pratique, on demande un peu plus : par deux points passe une et une seule une droite. Ainsi, pour peu qu'on se donne un plan, autrement dit un ensemble de points, qu'on y définisse des droites et que ces points et ces droites vérifient le premier postulat d'Euclide, on peut faire de la géométrie affine.

Parfait, essayons maintenant de construire notre propre géométrie. D'abord, prenons des points. Mais au fait, qu'est-ce-qu'un point ? La définition d'Euclide ne nous avance pas beaucoup :

Σημεῖόν ἐστίν, οὗ μέρος οὐθέν.

Le point est ce qui n'a pas de partie.

Cependant, ce qu'il veut dire est intéressant : un point est la quantité de base, on ne peut pas le diviser. En pratique, un point est absolument ce qu'on veut : on pourrait décréter aujourd'hui qu'on appelle point tous les sangliers,⁴ toutes les théières et tous les mots de plus de dix-huit lettres, et droite tout ensemble de points qui contient au moins un sanglier et une théière. On a défini un plan, appelons le plan exotique.

Exercice Est-ce-que le plan exotique a une géométrie ? Autrement dit, est-ce-que notre ensemble de points et notre ensemble de droites vérifient l'axiome d'Euclide : par deux points distincts passe une et une seule droite ? Discutons cela ensemble.


S'il n'y avait aucun sanglier sur Terre, on n'aurait aucune droite sur Terre selon notre définition... Comme il faut que par deux points distincts passe une droite, on n'aurait donc pas deux points distincts, ce que veut dire qu'on aurait finalement un seul point (théière ou mot de plus de dix-huit lettres, peu importe) et aucune droite dans notre plan exotique. Ça marche, mais ça n'est pas très intéressant (avec un plan à un seul point, il n'y a pas grand chose à étudier).

S'il n'y avait pas de théière sur Terre, on peut faire la même analyse, on obtient un plan avec un seul point (sanglier ou mot de plus de dix-huit lettres, peu importe) et aucune droite.

Supposons maintenant qu'il y a au moins un sanglier (Serge) et une théière (Tara) sur Terre. S'il y a au moins un autre point P dans notre plan (un deuxième sanglier, une deuxième théière ou un mot de plus de dix-huit lettres), intéressons-nous à S et T : ils forment une droite, mais l'ensemble T, S, P forme une autre droite ! Donc on n'a pas unicité de la droite passant par S et T , l'axiome tombe en défaut, on ne peut pas faire de géométrie affine.

En revanche, si Serge et Tara sont bien les deux seuls rescapés de la fin du monde, on a une géométrie à deux points et une droite, qui vérifie l'axiome.

Après cet interlude, passons aux choses plus sérieuses et définissons une géométrie un peu plus intéressante. On part du plan usuel (c'est-à-dire l'ensemble des points et des droites avec lequel on travaille au collège), et on lui rajoute des points :

 **Définition** On définit l'ensemble des points à l'infini de la façon suivante : pour chaque direction d dans le plan, on décrète qu'on a un point à l'infini dans cette direction, et on le note ∞_d . De plus, on décrète qu'une droite a passe par le point à l'infini ∞_d lorsque la droite a a pour direction d .


Remarque Attention, les points à l'infini ne sont donc pas des points spéciaux qu'on pourrait dessiner sur le plan. Ce sont plutôt des objets qu'on appelle des points pour pouvoir définir des ensembles de points nouveaux, comme on l'a fait tout à l'heure avec les sangliers, et construire de nouvelles géométries.

On a donc un ensemble de points, constitué des points du plan usuel et de ces points à l'infini fraîchement définis, et un ensemble de droites, qu'on prend pour l'instant égal à l'ensemble des


4. car c'est bien connu, un sanglier ça ne se partage pas...

droites du plan usuel. Ces ensembles vérifient-ils le premier postulat d'Euclide? Malheureusement non : aucune droite du plan usuel n'a deux directions différentes à la fois, donc aucune droite ne passe par deux points à l'infini distincts.

Qu'à cela ne tienne, on va donc rajouter une nouvelle droite à notre ensemble de droite : l'ensemble des points à l'infini.

 **Définition** On rappelle qu'une droite n'est autre qu'un ensemble de points : définir une droite, c'est donc simplement dire quels sont les points qui la compose. On peut donc tout à fait définir la droite constituée de tous points à l'infini, et on l'appelle la *droite à l'infini*.

Le-a lecteur-riche peut vérifier que ce choix d'ensemble (les points = les points du plan usuels et les points à l'infini ; les droites = les droites du plan usuel et la droite à l'infini) est conforme au premier postulat d'Euclide : par deux points du plan usuel passe une et une seule droite, par un point P du plan usuel et un point ∞_d à l'infini passe la seule droite de direction d contenant P , par deux points à l'infini passe uniquement la droite à l'infini. On arrête là la construction : on a un ensemble de points (usuels et à l'infini), un ensemble de droites (usuelles et à l'infini) qui vérifient le premier postulat d'Euclide. On a donc bien défini une nouvelle géométrie.

 **Définition** Cette géométrie s'appelle la *géométrie projective*, et l'ensemble des points qu'elle utilise s'appelle le *plan projectif*.

Un dernier exercice pour le-a fidèle lecteur-riche est maintenant de faire le lien entre les définitions qui viennent d'être formulées et le cahier des charges qu'on s'était donné en début de section, c'est-à-dire de comprendre, avec les définitions données :

- pourquoi deux droites parallèles se coupent bien en un point à l'infini ⁵ ;
- (corollaire) pourquoi deux droites du plan projectif ont toujours exactement un point d'intersection ;
- (bonus) ce que sont trois droites concourantes en un point à l'infini.

Finalement, ces considérations permettent de voir le théorème de Pappus et ses deux compléments comme trois cas particuliers du théorème suivant :

Théorème de Pappus généralisé *On se place dans le plan projectif. Soient g, h deux droites. Soient A, C, E trois points de g et B, D, F trois points de h . Soit I le point d'intersection de (AB) et (DE) , J le point d'intersection de (BC) et (EF) et K le point d'intersection de (CD) et (FA) . Alors les points I, J, K sont alignés.*

2.2 Du particulier au général : l'art des transformations géométriques

Maintenant, on a donc proposé un meilleur cadre pour le théorème de Pappus (celui de la géométrie projective). Le premier et le le second complément au théorème de Pappus de la première partie deviennent, dans ce cadre projectif, de simples cas particuliers du théorème généralisé (les cas où K (respectivement I et J) est (respectivement sont) à l'infini).

Mais si on a démontré un cas particulier dans la section 1.2, on est encore loin d'avoir prouvé le théorème, semble-t-il. Les mathématiques sont une science déductive éprise d'universel : elles établissent des propriétés universelles et les utilisent pour régler les divers cas particuliers qui se présentent à elles, mais n'ont que faire de la profusion d'exemples ou d'illustrations chère aux

5. solution : deux droites parallèles ont la même direction d , donc leur point infini est le même, c'est ∞_d .

physiciens, chimistes et biologistes à la recherche d'une pierre de touche expérimentale. On serait ainsi porté à croire que la démonstration d'un cas particulier n'avance en rien le-a mathématicien-ne en mal d'universalité... ce en quoi on se trompe! Rappelons pour cela une vieille discussion : la découverte par les Pythagoriciens de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Les Pythagoriciens disaient : « Le rapport entre la longueur de la diagonale d'un carré et son côté est irrationnel. » En revanche, ce qu'on énonce aujourd'hui est souvent ce cas particulier : « La diagonale d'un carré de côté 1 est de longueur irrationnelle. » Alors, la formulation moderne appauvrit-elle la propriété démontrée? Essayons d'aller du particulier au général, en montrant la propriété

$\mathcal{P}(c)$: « Dans un carré de côté c , le rapport entre la longueur de la diagonale et le côté est irrationnel. »

en supposant que la propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie.


Je prends un carré de côté c quelconque. Je peux le regarder à travers un instrument (loupe, microscope) qui divise toutes les longueurs observées par c . L'image que j'observe à travers mon instrument est alors toujours un carré, mais il est de côté 1! Donc l'image a une diagonale de longueur irrationnelle, d'après le cas particulier. Or, l'instrument multipliant toutes les longueurs par le même facteur $1/c$, il conserve les rapports de longueurs sur l'image par rapport à l'objet réel. Donc le rapport entre la longueur de la diagonale et c , qui est irrationnel sur l'image, est le même (donc est aussi irrationnel) dans la réalité.

Ainsi, le-a mathématicien-ne peut passer du particulier au général par le biais de transformations qui conservent certaines propriétés. Le-a sceptique peut dès lors objecter qu'on a dû recourir à des transformations physiques, et donc qu'on s'est éloigné du champ des mathématiques. Il-elle a raison de condamner un vice de procédure dans la preuve ci-dessous, mais ne doit pas révoquer la méthode pour autant : on peut tout à fait remplacer ces transformations physiques, plus intuitives, par des transformations géométriques, qui ont, elles, un plein droit de cité en mathématiques.

L'idée générale d'utiliser des transformations géométriques pour passer du particulier au général est très importante en géométrie. Elle a reçu ses lettres de noblesse en 1872, année de parution du programme d'Erlangen, un état des lieux et programme de recherche où le mathématicien allemand Felix Klein ramène les problèmes géométriques de son temps à l'étude systématique de transformations géométriques et des quantités qu'elles laissent invariantes. Ce point de vue radicalement nouveau est très fécond et se retrouve encore dans une bonne partie des mathématiques modernes.

À chaque géométrie ses transformations! En géométrie euclidienne (c'est-à-dire au collège), les propriétés qu'on étudie ne changent pas si on tourne notre figure ou si on la passe à la photocopieuse pour l'agrandir ou la rétrécir. En revanche, tracer un triangle quelconque de manière à le rendre équilatéral, dessiner des droites parallèles alors que l'énoncé ne le fait pas supposer, sont autant de procédés qui dénaturent l'exercice... Autrement dit, les rotations, les agrandissements et les réductions sont des transformations licites en géométrie euclidienne, mais le-a géomètre euclidien-ne ne peut pas transformer un triangle quelconque en triangle équilatéral, ni des droites quelconques en droites parallèles de façon « légale ».

En géométrie projective en revanche, les transformations licites sont bien plus diverses.

 **Définition** Une transformation licite pour la géométrie projective est appelée une *transformation projective*.

On se propose d'étudier ce que sont les transformations projectives dans la prochaine sous-partie.

2.3 Votre première transformation projective

Plutôt que d'expliquer ce qu'est une transformation projective d'un point de vue strictement géométrique, on en donne une explication physique, de nature très proche et par ailleurs plus simple à exposer :

- prenez votre figure géométrique préférée et tracez-la sur la fenêtre de votre thurne⁶ au feutre noir ;
- attendez la nuit, puis éclairez votre figure avec votre lampe de bureau ;
- regardez l'ombre qui se dessine en bas, dans la courô⁷.

En passant ainsi de votre figure à son ombre, vous venez de réaliser une transformation projective.

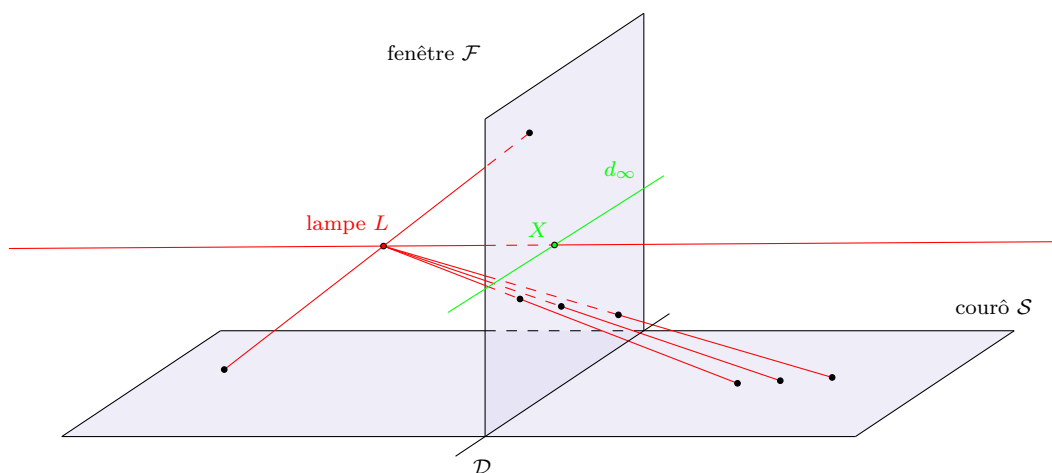


FIG 6.— Faire une transformation projective dans votre thurne

Que dire de cette superbe transformation ? Déjà, tout point de votre fenêtre n'est pas envoyé sur un point du sol de la courô : par exemple, les points qui sont « au dessus » de votre lampe n'ont pas d'ombre. C'est là la limite de nos transformations physiques. . . Mais pour le-a mathématicienne, un point A de la fenêtre peut toujours être relié à votre lampe, et cette droite (le rayon lumineux du-e la physicien-ne) peut être intersectée avec le sol pour trouver l'ombre de A , même si en l'occurrence, cette ombre se situe juste sur le plancher de votre thurne. C'est physiquement très douteux (puisque, malheureusement pour nous, la lumière a un sens de parcours, de la lampe au point A), mais définir mathématiquement l'ombre de A avec cette petite astuce n'est pas un problème. Il reste toutefois un problème : regardons un point X qui est à la hauteur de la lampe

6. la thurne (ou turne, les années bissextiles) est le nom consacré à la chambre du normalien logé dans les locaux de l'École : elle se décline en diverses couleurs, rouge, saumon, jaune (en rupture de stock) et vert (bientôt indisponible) et se situe à Paris, à Montrouge (ou à Jourdan) même si la direction dirait plutôt à Jourdan (ou à Paris ou Montrouge). La thurne, son état, son attribution, ses qualités évidentes et ses défauts cachés occupent la place d'honneur dans le lot des récriminations quotidiennes du normalien, avant même les retards du RER B et la borne Vélib' vide à Cité U.

7. la courô (ou couôro, les années bissextiles, qui abrège « cour aux Ernests ») est la grande cour carrée située au cœur de l'École. Elle est placée sous le haut patronage des Ernests, ces heureux poissons rouges vivant sous les roseaux de la fontaine centrale. En un certain sens, on peut dire que la fontaine de la courô est à nos amis polytechniciens ce que nous est la thurne : malgré les frimas et les infiltrations, ça reste notre chez-soi.

de bureau sur la fenêtre : quelle est son ombre ? Le rayon qui le relie à la lampe de bureau est parallèle au sol de la courô, il n'y a donc pas de point d'intersection entre ce rayon et le sol, donc pas d'ombre. Et le-a géomètre euclidien-ne rentre chez lui-elle dépité-e... Mais c'est là que la géométrie projective sauve l'expérience : l'ombre de X existe, elle est juste à l'infini sur le sol de la courô, dans la direction indiquée par la droite lampe- X . Conclusion : notre transformation projective n'envoie certes pas un point du plan usuel de la fenêtre sur un point du plan usuel du sol de la courô ; mais elle envoie bien un point du plan usuel associé à la fenêtre sur un point du plan projectif associé au sol de la courô ! Faisons une dernière vérification : prenons un point à l'infini ∞_d sur la fenêtre, et tentons de déterminer son ombre. Il suffit de tracer la droite passant par lui et par la lampe de bureau, c'est-à-dire la droite de direction d passant par la lampe de bureau, et de l'intersecter avec le sol : on obtient un point du sol, éventuellement à l'infini (si d est parallèle au sol) mais pas forcément (vu que d n'a aucune raison d'être parallèle au sol, le point d'intersection n'a aucune raison d'être à l'infini). Ainsi, notre transformation projective envoie un point du plan projectif de la fenêtre sur un point du plan projectif de la courô.

Il en va de même pour les droites, en particulier la droite verte de la figure est envoyée sur la droite à l'infini de la courô.

Est-ce-que cette transformation projective conserve les rapports de longueurs ? Hélas, non. Le-a géomètre moderne qui sommeille en vous se demande alors sans doute : mais que conservent les transformations projectives ? Pas grand chose, en fait. Les points, les droites projectifs, comme on l'a déjà montré ; pas les rapports de longueurs ni les angles, mais une quantité un peu plus compliquée appelée le birapport, qu'on ne présentera pas ici ; pas les cercles, puisqu'ils peuvent devenir des ellipses, des paraboles ou des hyperboles (mais rien d'autre, c'est déjà ça !). . . Rassurez-vous, ça n'est pas si grave : l'énoncé du théorème de Pappus ne nous parle que de points et de droites, jamais de longueurs, ni d'angles, ni de cercles. Donc le fait que les transformations projectives ne conservent pas grand chose ne nous dérangera pas aujourd'hui.

En revanche, les transformations projectives ont un intérêt notoire : elles offrent une grande liberté. Par exemple, si deux droites sont sécantes sur votre figure préférée, vous pouvez les dessiner sur votre fenêtre de façon à ce que leur point d'intersection soit sur la droite de la fenêtre qui est à la hauteur de votre lampe de bureau. Sur l'ombre, vous obtiendrez deux droites dont l'intersection est à l'infini, autrement dit deux droites parallèles. Avec une transformation projective, vous pouvez donc rendre deux droites quelconques parallèles de façon licite !

Attention : si vous aviez des droites parallèles sur votre figure sur la fenêtre, leurs ombres ne sont plus forcément parallèles. Comme on l'a déjà démontré, le point d'intersection de vos droites sur la fenêtre est un point à l'infini de la fenêtre, il est donc envoyé sur un point du plan projectif du sol... qui lui, n'est pas forcément à l'infini.

Donc vous ne pouvez pas rendre toutes les droites de votre figure préférée parallèles entre elles par le miracle d'une transformation projective, loin s'en faut. Mais vous pouvez rendre deux droites quelconques parallèles, comme on l'a déjà vu. En fait, vous pouvez même prendre deux paires de droites a_1, a_2 et b_1, b_2 et rendre l'ombre de a_1 parallèle à celle de a_2 et l'ombre de b_1 parallèle à celle de b_2 sur le sol de la courô : il suffit pour cela de tracer votre figure sur la fenêtre en plaçant le point d'intersection de a_1 et de a_2 et le point d'intersection de b_1 et de b_2 sur la droite verte de la fenêtre.

Pouvez-vous faire de même pour trois paires de droites a_1, a_2, b_1, b_2 et c_1, c_2 ? Il faudrait dessiner la figure de façon à placer les points d'intersection de a_1 et a_2 , de b_1 et b_2 et de c_1 et c_2 sur la droite verte de la fenêtre : c'est possible si (et uniquement si) ces trois points d'intersection sont alignés. Le même critère s'applique pour quatre paires de droites ou plus.

Après cette étude sommaire des transformations projectives, on peut envisager de démontrer

le théorème de Pappus généralisé.

2.4 La preuve du théorème de Pappus généralisé

On rappelle l'énoncé du théorème :

Théorème de Pappus généralisé *On se place dans le plan projectif. Soient g, h deux droites. Soient A, C, E trois points de g et B, D, F trois points de h . Soit I le point d'intersection de (AB) et (DE) , J le point d'intersection de (BC) et (EF) et K le point d'intersection de (CD) et (FA) . Alors les points I, J, K sont alignés.*

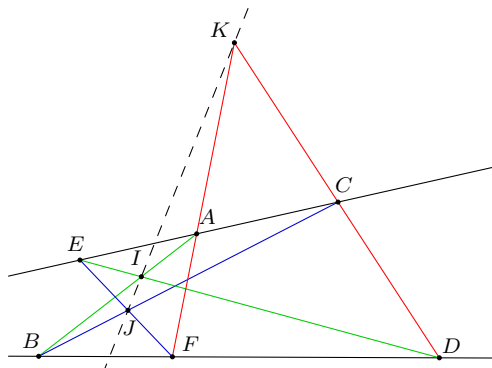


FIG 1 bis.— Théorème de Pappus généralisé

Preuve : on dessine la figure sur la fenêtre de manière à ce que les points I et J soient à la hauteur de la lampe de bureau (c'est-à-dire la droite verte de la fenêtre). Regardons l'ombre qui se dessine : comme les droites restent des droites et les points restent des points, g et h deviennent deux droites g' et h' , A, C, E deviennent A', C', E' , trois points de g' et B, D, F deviennent B', D', F' , trois points de h' . Les droites (AB) et (DE) qui se coupent en I deviennent $(A'B')$ et $(D'E')$, deux droites qui se coupent en un point à l'infini, c'est-à-dire deux droites parallèles. De même, les images $(B'C')$ et $(D'E')$ se coupent en l'image du point J , c'est-à-dire en un point à l'infini, donc elles sont parallèles.

Finalement, l'ombre obtenue est exactement la figure du second complément au théorème de Pappus qu'on a montré dans la section 1.2! On peut oublier momentanément la géométrie projective et ne regarder que cette figure simplifiée. D'après le cas particulier qu'on a montré en second complément du théorème de Pappus, on a donc $(C'D')$ et $(F'A')$ parallèles. Maintenant qu'on a analysé la figure simplifiée de l'ombre, retournons au point de vue projectif : K' est à l'infini, autrement dit le point d'intersection K des droites (CD) et (FA) a été envoyé sur le point d'intersection de $(C'D')$ et $(F'A')$ qui est à l'infini. Finalement, comme K a une ombre à l'infini sur le sol, il est en fait placé sur la droite verte de la fenêtre (à la hauteur de la lampe de bureau).

Ainsi, I, J et K sont tous les trois placés sur la droite verte de la fenêtre : ils sont donc alignés.

3 Et après ?

Maintenant qu'on a prouvé le théorème de Pappus, on peut se demander : pourquoi ce théorème ? À quoi « sert »-t-il ? On va montrer une application pratique du théorème de Pascal (une généralisation du théorème de Pappus) à l'astronomie, puis présenter deux applications mathématiques amusantes du théorème.

3.1 Pascal (1623-1662) et l'astronomie

Le théorème de Pappus est en fait un cas particulier d'un théorème de Pascal. Ce théorème porte sur les coniques.

Définition Les coniques sont la famille de courbes géométriques constituée des cercles, des ellipses, des paraboles, des hyperboles et des paires de droites.

Théorème de Pascal *On se place dans le plan projectif. Soit \mathcal{C} une conique. Soient A, B, C, D, E, F six points de \mathcal{C} . Soit I le point d'intersection de (AB) et (DE) , J le point d'intersection de (BC) et (EF) , K le point d'intersection de (CD) et (FA) . Alors les points I, J, K sont alignés.*

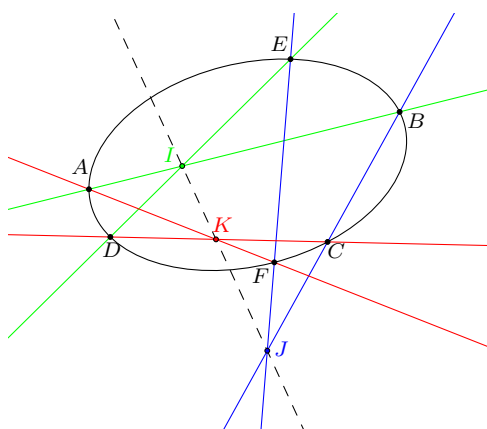


FIG 7.— Théorème de Pascal sur une ellipse

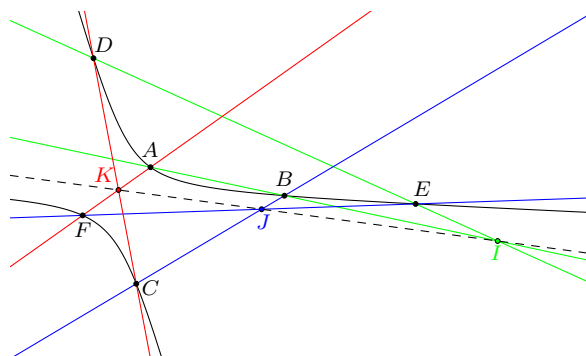


FIG 8.— Théorème de Pascal sur une hyperbole

Ce théorème a d'importantes conséquences en astronomie. En effet, les lois empiriques de Kepler notent que l'orbite de toute planète est une ellipse, et plus généralement, les lois de la gravitation de Newton permettent de montrer qu'en première approximation, la trajectoire d'un astre est une conique. Alors, le théorème de Pascal permet de reconstituer la trajectoire d'un astre à partir de cinq positions observées.

En effet, cinq observations nous donnent cinq points distincts A, B, C, D, E sur la conique que l'on veut tracer. Soit I l'intersection de (AB) et (DE) . Si on prend un point M dans l'espace, il est sur la conique si (et uniquement si) le point I , l'intersection J de (BC) et (EM) et l'intersection K de (CD) et (MA) sont alignés. Donc à tout point M de la conique, on peut associer une droite passant par I (la droite (JK)).

Inversement, si on prend une droite d passant par I , et qu'on appelle J l'intersection de (BC) et de d et K l'intersection de (CD) et de d , le point d'intersection M de (EJ) et de (KA) est sur la conique recherchée. Donc à toute droite d passant par I , on associe un point de la conique.

Pour tracer beaucoup de points sur la conique, on trace donc beaucoup de droites passant par I , et on leur associe des points par l'opération qu'on vient de décrire. D'où l'utilité du théorème de Pascal (indirectement, du théorème de Pappus) en astronomie.

3.2 Poncelet (1788-1867) et la dualité

On ne résiste pas à la tentation d'évoquer une dernière transformation géométrique : la dualité projective. Une idée fidèle de cette transformation est le jeu de mots suivant : dans un énoncé géométrique affine, on peut remplacer le mot *droite* par *point* à chaque fois qu'il se présente et le mot *point* par le mot *droite* à chaque fois qu'il se présente. On impose de plus la contrainte suivante : si un point P était sur une droite d avant la transformation, la droite p doit passer par le point D après la transformation. Ainsi, la droite passant par deux points A et B devient le point d'intersection des droites a et b , et inversement ; des points alignés sont transformés en droites concourantes ; *etc.*

On peut donner à cette transformation du langage un sens mathématique, si on définit une transformation géométrique qui vérifie ce cahier des charges. On ne le fait pas ici. On se contente de remarquer que tout théorème de géométrie affine a un théorème dual, la beauté de l'association résidant dans le fait (ici admis) que, si un tel théorème est vrai, son théorème dual est automatiquement vrai. Ainsi, en montrant le théorème de Pappus, on prouve aussi le théorème suivant :

Dual du théorème de Pappus *On se place dans le plan projectif. Soient G, H deux points. Soient a, c, e trois droites passant par G et b, d, f trois droites passant par H . Soit i la droite reliant le point d'intersection de a et b et le point d'intersection de d et e , j la droite reliant le point d'intersection de b et c et le point d'intersection de e et f et k la droite reliant le point d'intersection de c et d et le point d'intersection de f et a . Alors les droites i, j, k sont concourantes.*

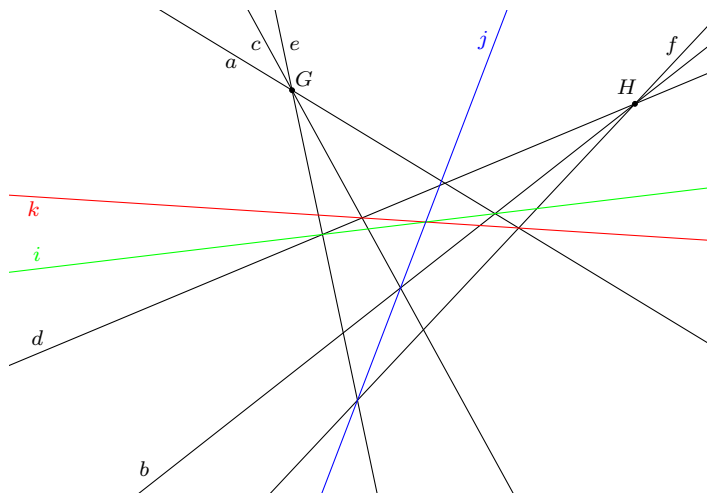


FIG 9.— Dual du théorème de Pappus

3.3 R. Schwartz (1966-) et les systèmes dynamiques

Ce dernier point n'intéressera probablement que le-a mathématicien-ne curieux-se qui se trouverait par mégarde lire ce polycopié, c'est pourquoi il n'est pas développé.

Le théorème de Pappus part de deux fois trois points alignés et construit à partir de là trois nouveaux points alignés. C'est le point de départ pour définir un système dynamique. En pratique,

il faut être un peu plus soigneux sur les espaces sur lesquels on travaille et définir plus proprement la fonction qu'on itère. R. Schwartz entreprend cela ainsi qu'une étude assez complète (et très intéressante) de ce système. On conseille au lecteur intéressé le chapitre 1.4. de l'excellent livre de Marcel Berger *Géométrie vivante ou l'échelle de Jacob* qui donne un aperçu des résultats obtenus, et bien sûr l'article original de Richard Schwartz, *Pappus' theorem and the modular group*, Publications de l'IHÉS, tome 78, p.187-206.