Voyage en dimensions supérieures

Eva Philippe

13 novembre 2017

Séminaire “Maths Pour Tous"

Table des matières

Préambule

L'espace qui nous entoure est un espace de dimension trois et parler de quatrième dimension semble plutôt du ressort des artistes ou des auteurs de science-fiction.

Ou s'agirait-il du temps comme on peut l'entendre à propos de la théorie physique de la relativité ?

En tous cas si vous trouvez que ce n'est pas très naturel de vouloir essayer d'imaginer un espace de dimension 4, ne vous inquiétez pas, vous n'êtes pas les seul-e-s ! Historiquement aussi, l'idée a mis du temps à venir. D'ailleurs la géométrie en dimensions 2 et 3 était déjà très riche en elle-même.

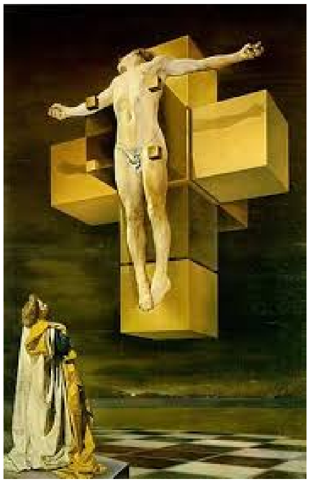


FIGURE 1 – *Corpus hypercubus*, Salvador Dali, 1954

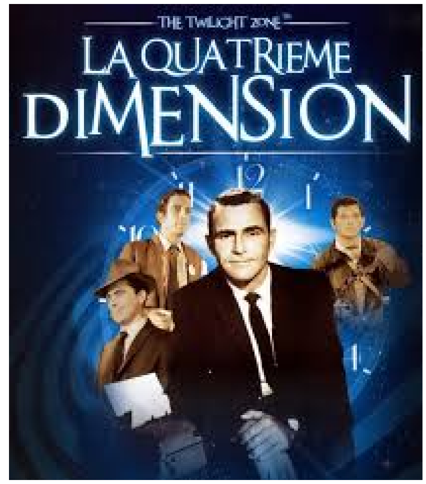


FIGURE 2 – *La quatrième dimension*, version française de la série américiaine *The twilight zone*, diffusée de 1959 à 1964

Dans l'Antiquité, Aristote parle de trois grandeurs dans son *Traité du Ciel* (traduction de Saint-Hilaire, 1866) : la ligne, la surface et le corps (ou volume) et il ajoute "Il n'y a pas de grandeurs autres que celles-là, parce que trois est tout et que trois renferme toutes les dimensions possibles." Au 18e siècle, les intellectuels commencent à se poser la question de quatrième dimension. Dans l'article Dimension de l'*Encyclopédie*, d'Alembert écrit qu'il n'est pas possible de concevoir plus de trois dimensions mais ajoute : « Un homme d'esprit de ma connaissance croit qu'on pourrait cependant regarder la durée comme une quatrième dimension ».

Au 19e siècle, Bernhard Riemann avait sans doute une idée claire sur l'espace de dimension 4 mais c'est surtout le mathématicien allemand Ludwig Schläfi (1814-1895) qui a pris conscience que même si notre espace physique semble bien de dimension 3, rien n'empêche d'imaginer un espace de dimension 4, et même de démontrer des théorèmes de géométrie qui concernent les objets mathématiques de dimension 4. Même au sein de la communauté des mathématiciens, la quatrième dimension a gardé longtemps son aspect mystérieux et impossible à l'époque de Schläfli, peu de lecteurs ont dû percevoir l'importance de ses travaux. Il a fallu attendre le début du vingtième siècle pour que les mathématiciens comprennent l'intérêt d'un tel travail monumental.

Au cours de cet exposé, je vous propose de faire travailler votre imagination pour naviguer dans des espaces de dimension 4 ou plus.

Pour commencer, je vais tenter de justifier pourquoi on s'intéresse à des espaces de dimension supérieure à 3 et d'expliquer ce qu'on entend par dimensions d'un espace.

Ensuite, nous verrons comment on peut étudier la géométrie de ces espaces. Pour cela, nous allons prendre l'exemple d'un problème de géométrie dans l'espace, ce qui nous permettra d'appréhender quelques outils mathématiques et comprendre comment les généraliser à des espaces de dimension quelconque.

Enfin, nous allons essayer de voir comment la connaissance de ces espaces de dimension supérieure permet de résoudre des problèmes concrets, en s'appuyant sur un problème d'optimisation de production de gâteaux.

1 Pourquoi les dimensions supérieures ?

1.1 Quelques motivations

Pourquoi s'intéresser aux espaces de dimensions supérieures à 3 ? Voici quelques motivations qui me viennent à l'esprit. Il en existe sans doute d'autres, en tous cas j'espère que celles-là vous donneront envie d'en savoir plus !

Dépasser les limites imposées par notre perception physique Je trouve qu'il y a d'abord un intérêt presque philosophique pour un mathématicien de pouvoir s'abstraire des contraintes tridimensionnelles imposées par la réalité physique qu'on connaît, pour pouvoir étudier d'autres espaces. C'est un exemple de la puissance des mathématiques : pouvoir dire des choses, donner des propriétés sur des objets que l'on ne peut pas voir ni manipuler (par exemple, on peut compter le nombre de sommets d'un carré, d'un cube. Pour un hypercube (en dimension 4), on verra comment on peut le calculer même si on ne “voit” pas l'hypercube). On verra également comment se faire des représentations mentales de la géométrie dans un espace de dimension 4.

Prendre de la hauteur : se demander quelle est la forme de l'Univers Imaginer des espaces de dimensions supérieures permet de prendre de la hauteur. Voici une analogie que j'aime beaucoup : imaginons une fourmi qui vivrait en dimension 2, elle pourrait donc se déplacer sur une surface mais pas percevoir la notion de hauteur ni de volume. Que se passe-t-il si elle vit à la surface d'une sphère ? Pour elle l'espace ambiant ressemble à un plan infini mais il se passe des choses bizarres : si elle se déplace dans une direction, elle finit par retomber sur son point de départ. Nous, êtres tridimensionnels, pouvons comprendre cette situation car nous savons que cette surface sur laquelle vit la fourmi est en fait une sphère dans un espace de dimension 3. Par analogie, ne pourrait-on pas penser que, bien que notre espace tridimensionnel habituel nous semble "plat" et infini dans toutes les directions, il est en fait "replié" dans un espace de dimension 4 ou plus ? On pourrait alors connaître le même phénomène que notre fourmi : si on avait une fusée qui peut aller aussi loin qu'on veut et qu'on la prenait en ligne droite, peut-être qu'on finirait par repasser par notre point de départ... troublant, non ? Concevoir des espaces de grandes dimensions ouvre bien des perspectives...

Résoudre des problèmes concrets On verra que comme souvent en mathématiques, développer des outils et des modèles très abstraits (ici les espaces de dimensions supérieures) d'abord dans un intérêt essentiellement esthétique permet ensuite de modéliser et traiter des problèmes bien plus ancrés dans le réel. Par exemple, depuis Einstein les physiciens utilisent un espace à quatre dimensions pour représenter l'espace-temps. En fait beaucoup de problèmes concrets, en particulier ceux qui concernent la manipulation de données, se posent naturellement en grandes dimensions. On verra quelques exemples dans la troisième partie.

1.2 Mais de quoi parle-t-on quand on parle de dimensions ?

Dimensions spatiales Commençons par préciser que lors de cet exposé on va principalement s'intéresser à des dimensions spatiales et considérer des espaces euclidiens, c'est-à-dire qui "ressemblent" à une droite en dimension 1, un plan infini en dimension 2, l'espace tridimensionnel habituel en dimension 3. Il faut que j'explique ce que j'entends ici par "ressembler". Je vais être assez générale, mais à chaque fois vous pourrez vérifier que ce que je dis s'applique à une droite, à un plan ou à l'espace tridimensionnel.

Dans un espace, les objets les plus élémentaires que l'on étudie sont les *points*, et l'espace correspond justement à l'ensemble des points possibles. A partir d'un point de départ, on peut atteindre les autres points de l'espace en se déplaçant en ligne droite (qui corrspond à une droite habituelle de dimension 1) selon des *directions*.

Remarquons que lorsqu'on se déplace dans une direction, on peut se déplacer selon deux sens différents : en "avançant" ou en "reculant", tant qu'on reste sur la même droite. Des droites parallèles correspondent à une même direction.

Définition 1.1. Toute ligne droite définit une *direction* et deux droites définissent la même direction si ces droites sont parallèles.

Dans un espace euclidien on a la propriété suivante : à partir d'un point de départ, on peut atteindre n'importe quel autre point en se déplaçant dans une unique direction, selon une droite.

En particulier, cela signifie que l'on peut atteindre tous les points de la droite donnée par la direction et que si l'on ne peut pas atteindre un même point en partant dans deux directions différentes.

Par exemple, quand je parle de plan en dimension 2, je veux qu'il soit plat et infini. Pas comme une sphère par exemple, où on peut atteindre le pôle Nord en partant du pôle Sud et en se déplaçant selon n'importe quelle direction, même si localement, pour notre fourmi, cela ressemble à un plan.

Bien sûr, ces espaces euclidiens de dimensions 1, 2 et 3 sont assez faciles à concevoir, mais il s'agit déjà d'abstractions : vous pouvez très bien imaginer une droite même si on ne peut pas rigoureusement la représenter et la percevoir (elle est infinie et n'a pas d'épaisseur).

Passer de la dimension 1 à la dimension 2 et aux autres Pour comprendre ce qu'on entend par dimension d'un espace, commençons par regarder les espaces que l'on connaît bien : ceux de dimension 1, 2 et 3. (On peut dire qu'un espace de dimension 0 est juste un unique point, cette situation n'est pas passionnante). Pourquoi une droite est-elle de dimension 1 alors qu'un plan est de dimension 2 et que notre espace est de dimension 3 ?

Définition 1.2. La *dimension* d'un espace correspond au nombre minimal de directions qui suffisent à atteindre toutes les positions de l'espace en ne se déplaçant que selon ces directions.

On constate qu'une droite n'a qu'une seule direction.

Pour se déplacer dans un plan il faut nécessairement qu'une deuxième direction soit possible. Cette deuxième direction ne doit pas être parallèle à la première droite de départ (on dit qu'elle est *indépendante*). Dès lors que nous avons ces deux directions, on peut atteindre toutes les positions du plan en ne se déplaçant que selon ces deux directions.

En revanche, si on veut sortir du plan pour se déplacer dans l'espace tridimensionnel, il faut pouvoir se déplacer selon une troisième direction, indépendante des deux premières, c'est-à-dire qui n'est pas déjà contenue dans le plan sur lequel on était.

Pour imaginer un espace de dimension 4, il suffit donc de se dire qu'on peut se déplacer selon quatre directions indépendantes et pour un espace de dimension n, selon n dimensions indépendantes.

En fait, si l'on fixe un point de départ, que l'on appelle $l'origine$, et n directions indépendantes qui permettent d'atteindre tout l'espace de dimension n (on les appellera des *axes*) on peut caractériser chacune des positions grâce aux longueurs que l'on doit parcourir dans chaque direction pour

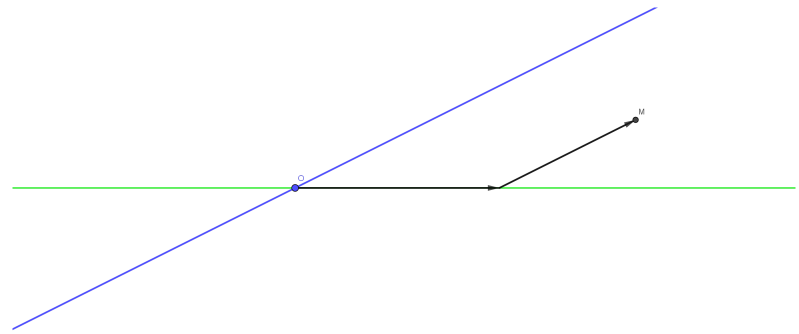


FIGURE 3 – On peut aller du point O au point M en se déplaçant selon les deux directions données par les droites verte et bleue.

aller de l'origine à cette position. Nous verrons plus précisément comment cette caractérisation fonctionne, et pourquoi il vaut mieux utiliser des axes perpendiculaires.

Une notion plus générale En mathématiques, la notion d'espace est beaucoup plus générale que les espaces euclidiens que j'ai tenté de décrire ci-dessus. Dans presque n'importe quel contexte, on peut appeler les objets les plus élémentaires qu'on regarde, s'ils sont de même nature, des "points" et considérer "l'espace des possibles" dans lequel vivent ces points.

Par exemple, on utilise souvent des graphes, représentés dans le plan, pour décrire l'évolution d'une certaine grandeur. Prenons l'exemple de l'évolution de la température dans une certaine station météo notée M. Ici, les "points" qui nous intéressent sont l'ensemble des situations "il fait la température T au temps h" à la station M. Deux paramètres entrent en jeu : la température et l'instant auquel on la mesure.

Ici, on a regardé un point M fixé, mais on peut s'intéresser à l'évolution de la température dans un espace (de dimension 3). Cinq paramètres réels seront alors nécessaires pour décrire une situation : un paramètre pour la température, un pour l'instant où elle est mesurée et trois pour l'endroit où elle est mesurée.

Le nombre de dimensions correspond alors au nombre de paramètres nécessaires pour décrire un objet/un individu/une situation.

Quelques exemples supplémentaires :

— images numériques : Vous le savez sans doute, les images numériques sont composées de pixels, auxquels on associe soit un unique nombre qui indique la luminosité (compris entre 0 et 255) pour les images en noir et blanc, soit trois nombres, un pour chacune des couleurs rouge, vert et bleu. Si on regarde les images en noir et blanc de taille 100 pixels $\times$ 100 pixels, on peut donc considérer que ce sont des points dans un espace de dimension 10000 où chaque coordonnée correspond au degré de luminosité d'un pixel.

— réponses à un questionnaire : Lorsque l'on analyse les réponses à un questionnaire, on obtient des informations sur les personnes qui ont répondu et on peut avoir envie de mettre de la structure sur les types de réponse, par exemple pour dégager des profils-types (pour un questionnaire à des consommateurs, est-ce que l'achat de farine est corrélé à l'achat de beurre ?). On suppose que les réponses sont données par un nombre, ou une échelle de valeurs. On peut alors considérer l'espace de toutes les réponses possibles au questionnaire, dont la dimension est le nombre de questions.

— optimisation de la production industrielle : Imaginons une usine de production de gâteaux qui peut vendre différents articles (madeleines, financiers, brioche, etc) et cherche à optimiser ses choix de production, c'est-à-dire trouver la situation qui lui permet de maximiser ses bénéfices, tout en respectant les contraintes imposées par les stocks de rssources disponibles. Une situation correspond à choisir les quantités produites pour chaque article. On peut donc voir une telle situation comme un point de l'espace de toutes les configurations possibles, qui a autant de dimensions que d'articles que l'usine peut produire.

On détaillera ces exemples dans la troisième partie de l'exposé, en particulier celui d'optimisation industrielle.

Remarque 1.1. En mathématiques il existe aussi des espaces de dimension infinie. Je n'en parlerai pas plus pour cet exposé mais voici un exemple : l'ensemble des suites de nombres réels.

De plus, il existe une autre notion de dimension : la *dimension de Hausdorff*, qui permet de donner un sens à des dimensions non entières, pour les objets fractals.

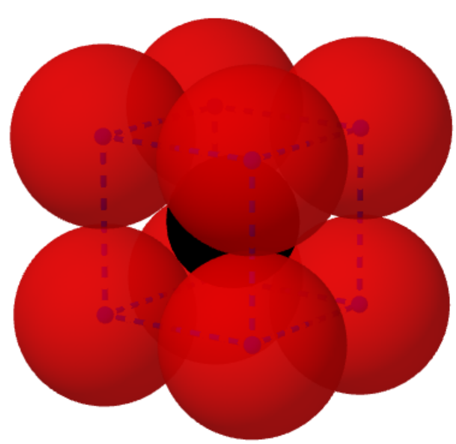
2 Un problème de boules de pétanque et sa généralisation

Maintenant que l'on a vu des motivations pour étudier des espaces de dimension supérieure à 3 et que l'on a une idée plus précise de ce à quoi correpond un espace euclidien, on va voir comment faire de la géométrie dans ces espaces.

Généraliser un problème est un comportement fréquent de la part des mathématicien-ne-s. En particulier, pour les problèmes de géométrie posés en dimension 2 ou 3, on peut souvent se demander ce que serait l'équivalent en dimension supérieure (4, 5, ou plus généralement n).

Je vous propose d'imiter les mathématicien-ne-s en prenant comme point de départ le problème suivant, que j'appellerai le *problème du cochonnet* :

On veut pouvoir ranger notre jeu de pétanque de la manière suivante : les boules de pétanque sont placées aux sommets d'un cube en se touchant deux à deux alors que le cochonnet est au centre de ce cube. Quelle est la taille maximale du cochonnet ?



Vouloir généraliser un tel problème en dimension supérieure tient certes de l'amusement intellectuel mais cela nous permettra de voir comment se généralisent certaines notions qu'on a l'habitude d'utiliser pour faire de la géométrie en dimensions 2 et 3... et nous réservera une surprise !

2.1 Analogue en dimension 2, un peu de géométrie cartésienne

Avant de se poser la question de la généralisation en dimension supérieure à 3, commençons par regarder l'analogue de notre problème en dimension 2. En effet, c'est quand-même plus facile pour nous de faire des dessins et raisonner en 2D et on verra que les outils nécessaires pour les dimensions supérieures sont exactement les mêmes que ceux utilisés en dimension 2 !

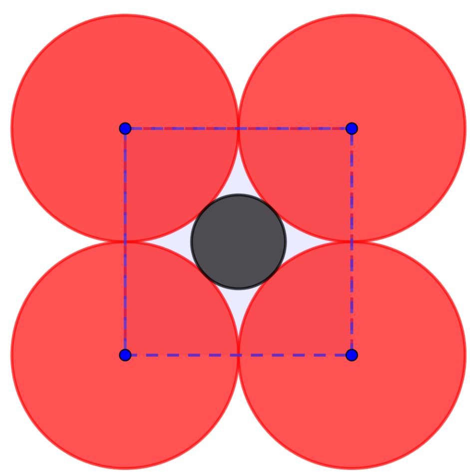
Des sphères et un cube en dimension 2 ? Avant de se donner des outils, réfléchissons à comment se traduit notre problème en dimension 2.

Que deviennent les boules de dimension 3 ? Des disques.

Le cube ? un carré.

On peut donc traduire notre problème de la manière suivante :

Quatre disques sont placés aux sommets d'un carré en se touchant deux à deux et on veut placer un petit cercle (le contour du cochonnet) au centre de ce carré, qui ne traverse pas les disques. Quelle est son rayon maximal ?



Coordonnées cartésiennes Pour se donner un cadre dans lequel il est plus facile de répondre à notre question, on introduit un repère cartésien. Ce nom *cartésien* rend hommage à René Descartes, qui a le premier utilisé des caractérisations algébriques pour résoudre des problèmes géométriques, en particulier le théorème de Pappus dont a parlé Cécile Gachet lors de l'exposé "Comment démontrer un théorème en le dessinant sur sa fenêtre ?".

Se donner un repère cartésien en dimension 2, c'est fixer deux axes perpendiculaires gradués avec la même unité (on les note traditionnellement x et y). Ensuite, on pourra *repérer* chaque point M par deux nombres : ses coordonnées sur les axes x et y, que l'on notera (x_M, y_M). Pour trouver ces coordonnées, il faut regarder la *projection orthogonale* du point sur les axes, c'est-à-dire l'intersection de l'axe x (respectivement y) avec la droite orthogonale à l'axe et passant par le point. Ensuite, on peut associer un nombre x_M (respectivement y_M) à ce point qui appartient à l'axe, grâce à l'unité qu'on a choisie.

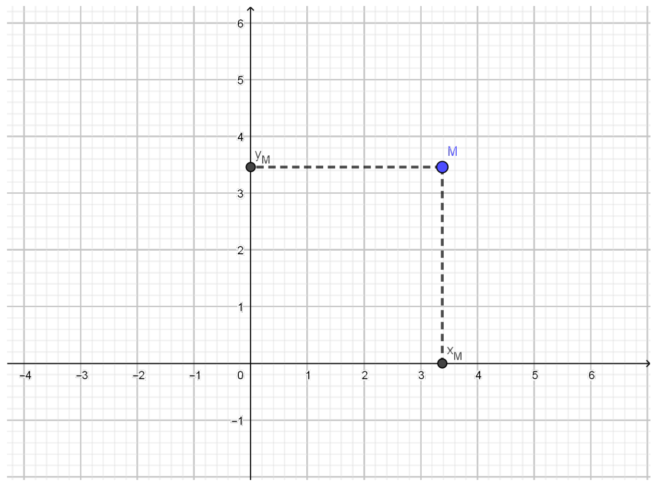


FIGURE 4 – Un point M et ses coordonnées dans un repère cartésien

En faisant cette opération, on peut dire qu'on identifie le plan à $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des couples de deux réels. En effet, si on se donne deux points du plan on peut toujours leur associer les deux réels correspondant à leurs coordonnées et si on a un couple de réels, notons-le (x, y), on peut trouver un point du plan qui a ces coordonnées.

Pourquoi est-ce une bonne idée d'utiliser un repère et des coordonnées ? Au lieu de seulement faire des raisonnements visuels, on va pouvoir faire du calcul, donner une caractérisation algébrique des objets qui nous intéressent, c'est-à-dire qu'on peut les définir grâce à des équations ou des inéquations qui portent sur les coordonnées de points qu'ils contiennent.

Équation d'une droite Par exemple, une droite (d) est définie par une équation de la forme

$$ax + by + c = 0, \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont trois nombres réels,}$$

ce qui signifie que les points de la droite (d) sont exactement les points M du plan dont les coordonnées (x_M, y_M) vérifient l'équation $ax_M + by_M + c = 0$.

Équation d'un cercle, distances Dans notre problème du cochonnet, ou plutôt sa variante en dimension 2, on a affaire à des disques. Peut-on caractériser les disques de manière algébrique grâce aux coordonnées cartésiennes ?

Pour cela, rappelons la définition d'un disque. Pour définir un disque, il faut connaître deux choses : le centre, noté C, de ce disque, qui est un point du plan et son rayon, noté r, qui est une longueur (donc un nombre positif).

Définition 2.1. Un *disque* de centre C et de rayon r est l'ensemble des points du plan qui se situent à une distance inférieure à r du point C.

Je donne aussi ici la définition d'un cercle, qui est très proche de celle d'un disque mais on ne prend pas les points "à l'intérieur" :

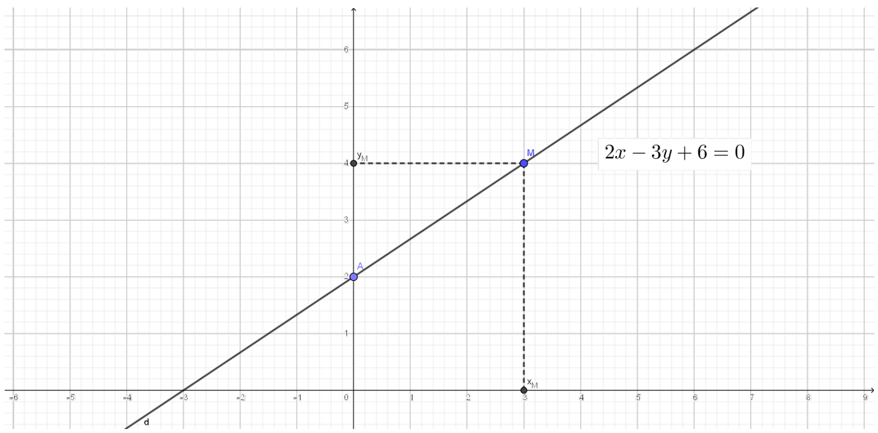


FIGURE 5 – Droite (d) d'équation $2x - 3y + 6 = 0$

Définition 2.2. Un *cercle* de centre C et de rayon r est l'ensemble des points du plan qui se situent à une distance exactement égale à r du point C.

On constate que ces définitions font intervenir la notion de distance. Dans la vie réelle, sur un dessin, on sait *mesurer* des distances (par exemple avec une règle, ou en la comparant à une autre longueur grâce à un compas), mais l'intérêt majeur de travailler avec des coordonnées cartésiennes est de pouvoir *calculer* ces distances.

Proposition 2.1. Dans un repère cartésien, la distance entre deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) se calcule :

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Remarque 2.1. Ici, la distance définie correspond bien à celle dont on a l'habitude car on a choisi un repère orthonormé : les axes sont orthogonaux et de même unité sur les deux. Précisons qu'en mathématiques, on peut définir d'autres distances que celle-ci. Sur un espace quelconque, on dit qu'une application qui à deux points de l'espace associe une grandeur positive est une distance si elle vérifie les trois propriétés suivantes (dont le nom technique est donné entre parenthèses) :
- la distance d'un point A à un point B est la même que la distance du point B au point A (symétrie)
- deux points qui sont à distance 0 sont en fait le même point (séparation)
- c'est toujours plus court d'aller directement d'un point A à un point B que de passer par un troisième point C : $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ (inégalité triangulaire).

La distance particulière définie par la propriété ci-dessus est appelée *distance euclidienne*.

Démonstration 2.1. Cette formule peut sembler un peu compliquée au premier abord, mais en fait, il s'agit seulement d'une conséquence du théorème de Pythagore (voir figure 6).

Maintenant on peut donc donner l'équation d'un cercle de centre C de coordonnées (x_C, y_C) et de rayon r :

$$\sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} = r,$$

ce qui peut se réécrire :

$$(x - x_c)^2 + (y - y_C)^2 = r^2.$$

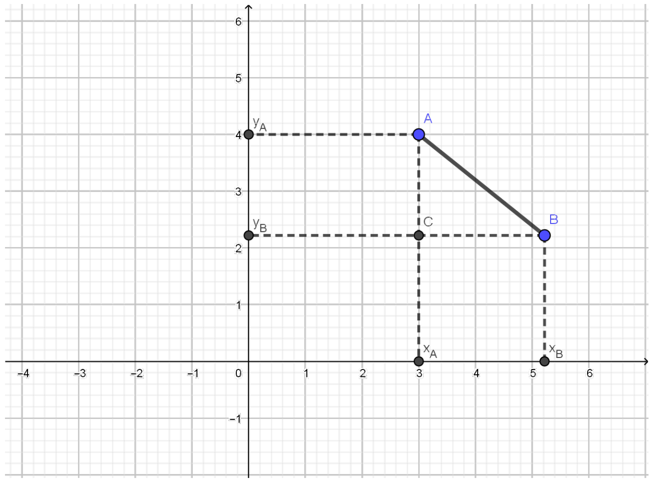


FIGURE 6 – Le triangle ABC est rectangle en C, de côtés $d(A,C) = |y_A - y_B|$ et $d(B,C) = |x_A - x_B|$ donc d'après le théorème de Pythagore on a $d(A,B)^2 = d(A,C)^2 + d(B,C)^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$.

2.2 Résolution du problème en dimension 2 et 3

Retour à notre problème et résolution Pour se fixer les idées, dans notre cas on va placer les sommets de notre carré aux points de coordonnées $(-1,-1), (-1,1), (1,-1)$ et $(1,1)$. Les disques seront donc de rayon 1.

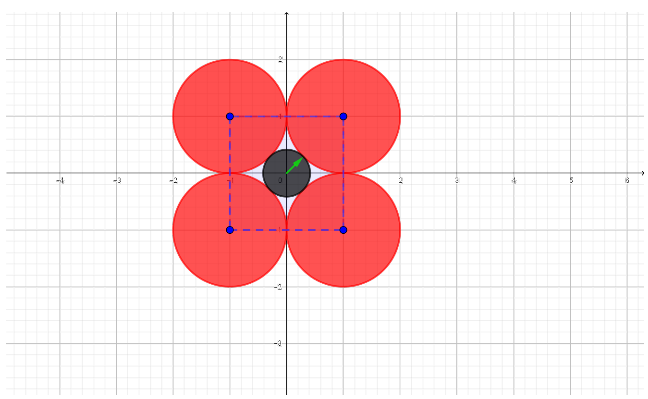


FIGURE 7 – Schéma du problème du cochonnet en dimension 2 dans un repère cartésien

La question qu'on se pose maintenant est donc de calculer le rayon du disque noir lorsqu'il est tangent aux disques rouges (c'est-à-dire qu'il les touche sans superposition). C'est la longueur représentée par la petite flèche verte sur la figure 7, on la notera l_2.

Le théorème de Pythagore permet de calculer la longueur de la demi-diagonale : $d(O,C) = \sqrt{2}$, de plus les disques sont de rayon 1. On en déduit que $l_2 = \sqrt{2} - 1$

On a ainsi calculer le rayon maximal du cochonnet en dimension 2 :

$$l_2 = \sqrt{2} - 1 \simeq 0,4142.$$

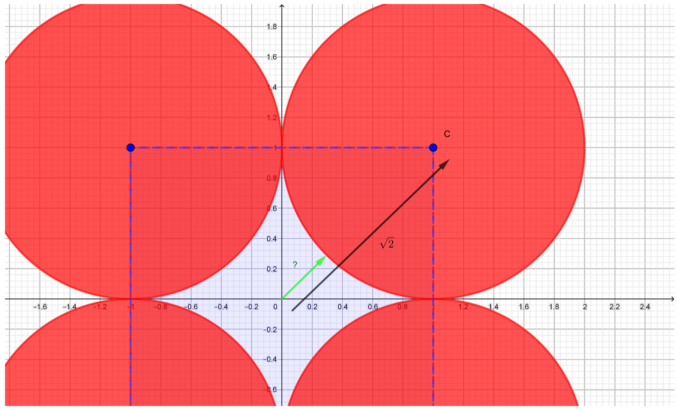


FIGURE 8 – La longueur de la petite flèche verte correspond au rayon maximal du cochonnet en dimension 2.

Résolution du problème initial en dimension 3 Pour résoudre notre problème en dimension 3, il suffit de savoir comment calculer les distances en trois dimensions en posant un repère cartésien qui possède maintenant trois axes orthogonaux et de même unité.

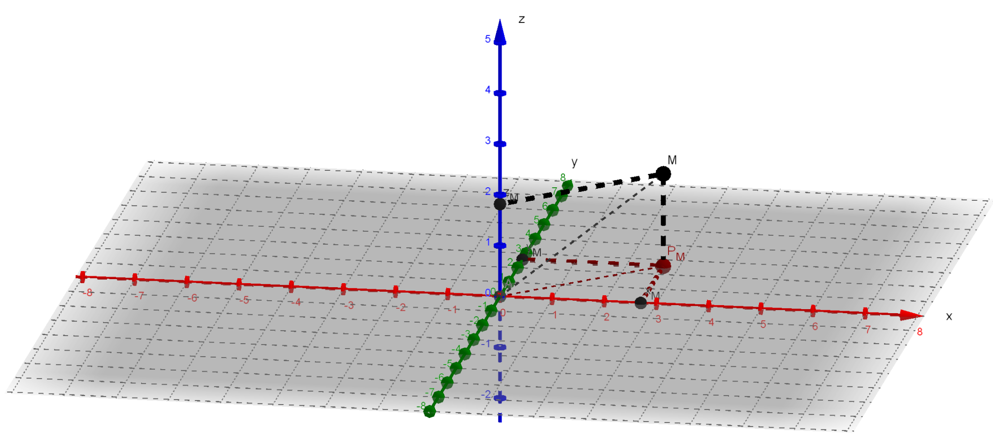


FIGURE 9 – Les trois axes x, y et z sont représentés respectivement en rouge, vert et bleu. Un point M est repéré par ses coordonnées (x_M, y_M, z_M). On peut noter P_M la projection du point M sur le plan xOy, qui a pour coordonnées $(x_M, y_M, 0)$.

Proposition 2.2. Dans un repère cartésien à trois dimensions, la distance entre deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) se calcule :

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

(voir figure 9)

Démonstration 2.2. Commençons par calculer la distance du point M de coordonnées (x_M, y_M, z_M) à l'origine (le point O, de coordonnées $(0,0,0)$). Si on reste dans le plan "horizontal" (xOy), on a vu précédemment comment calculer la distance OP_M :

$$OP_M^2 = x_M^2 + y_M^2.$$

Ensuite on réutilise le théorème de Pythagore, dans le triangle OP_MM, rectangle en P_M :

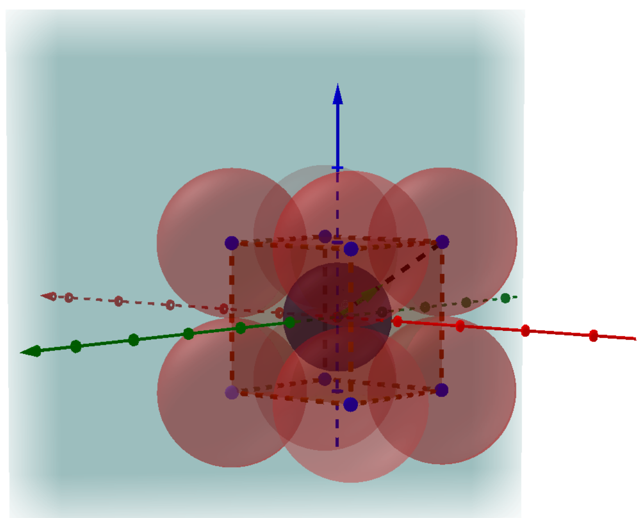
$$OM^2 = OP_M^2 + P_MM^2 = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2.$$

Ensuite pour calculer la distance entre deux points quelconques A et B, on peut refaire le même raisonnement mais en prenant le point B comme origine. Il faut donc enlever respectivement x_B, y_B et z_B aux coordonnées selon x, y et z.

On obtient bien

$$AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2,$$

d'où le résultat en passant à la racine carrée.



Pour trouver le rayon maximal l_3 du cochonnet en $3D$, il faut calculer la longueur de la petite flèche verte, qui correspond à la longueur de la demi-grande diagonale du cube (de côté 2) moins le rayon des boules (1).

Un sommet du cube étant de coordonnées $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ (ce qui signifie que chacune des coordonnées peut être $+1$ ou -1), la longueur de la demi-grande diagonale est $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

On obtient donc :

$$l_3 = \sqrt{3} - 1 \simeq 0,7321.$$

2.3 Et si on généralise ?

Pour comprendre un peu ce que sont des espaces de dimension plus grande que trois, on va essayer de comprendre comment généraliser notre problème du cochonnet en dimension quatre ou plus.

On l'a vu dans la première partie, travailler dans un espace de dimension n, c'est principalement dire que les objets (points) que l'on étudie ont besoin de n nombres, que l'on appelle leurs coordonnées, pour être décrits.

C'était bien le cas pour le plan $\mathbb{R}^2$ et l'espace habituel $\mathbb{R}^3$. L'espace euclidien à n dimensions $\mathbb{R}^n$ est donc l'ensemble des n-uplets de nombres réels de la forme $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où l'on peut voir les x_i comme les coordonnées du point selon n axes orthogonaux et gradués avec la même unité (ce qui correspond à x, y et z en dimension 3).

Repère orthonormé et distances Mais maintenant, comment fait-on de la géométrie dans ces espaces ?

Il faudrait commencer par savoir comment on mesure des longueurs, autrement dit : si on a deux points A et B dans l'espace $\mathbb{R}^n$, qu'est-ce que la distance $d(A, B)$?

Comme en dimension 3, on va commencer par définir la distance d'un point, noté X, à l'origine O (le point de coordonnées $(0, 0, \ldots, 0)$). On notera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les coordonnées du point X. Alors la distance de X à l'origine est donnée par :

$$d(O, X) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Ensuite, trouver la distance entre A et B consiste à faire le même calcul avec B comme origine, donc toutes les coordonnées de B doivent être soustraites à celles de A. Concrètement, si les coordonnées de A sont notées $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et les coordonnées de B sont notées $(b_1, \ldots, b_n)$, alors :

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}.$$

Remarque 2.2. Cette définition verifie bien les propriétés d'une distance énoncées dans la remarque 2.1. De plus, elle correspond bien à la notion de distance qu'on a envie de généraliser : c'est une distance euclidienne. Par exemple si les coordonnées de A sont multipliées par 2, sa distance à l'origine aussi est multipliée par 2. En fait, cette distance est associée à un *produit scalaire*, et c'est ce produit scalaire qui permet de définir l'orthogonalité (en effet, on a bien du mal à se représenter plus de quatre droites toutes perpendiculaires entre elles... quand l'imagination ne suffit pas il faut donc se donner les outils et les définitions adaptées !).

Un cube de dimension 4 ? L'hypercube et autres polytopes Avec tout le formalisme que nous avons maintenant, on a l'impression qu'on pourrait se contenter de manipuler uniquement des nombres et de faire des calculs. C'est en partie vrai et c'est de cette manière que l'on prouve des résultats rigoureusement. Mais rien ne nous empêche, et c'est même l'aspect qui m'intéressait le plus pour proposer cet exposé, de nous interroger sur la représentation mentale que l'on peut se faire de ces géométries de dimensions supérieures. On va donc s'éloigner un peu de notre problème de cochonnet pour explorer les rives de la dimension 4 avec nos yeux de dimension 3. Pour la dimension 4 on peut utiliser des analogies et des astuces qui sont plus difficiles à développer pour les autres dimensions, encore plus éloignées de notre univers habituel.

Commençons par étudier l'*hypercube*, aussi appelé *tesseract* : la généralisation du cube en dimension 4. Comprendre un tel objet signifie avant tout pouvoir décrire ses constituants (combien y a-t-il de sommets, d'arêtes, etc ?) et leurs relations (quels sommets sont reliés par une arête ?).

Voici deux manières de construire l'hypercube, qui sont équivalentes même si je ne le démontrerai pas. On peut d'abord définir un hypercube uniqueent de manière algébrique avec des équations. Mais personnellement je préfère la deuxième construction, qui s'appuie sur l'analogie entre un carré et un cube pour expliquer comment passer d'un hypercube de dimension n à un hypercube de dimension $n + 1$.

Pour donner une définition algébrique de l'hypercube, on se place dans un repère cartésien à quatre axes, que l'on notera x, y, z, t (c'est un peu moins lourd à écrire que x_1, x_2, x_3, x_4, ce ne sont que des notations). Comme dans le cas en 2 et 3 dimensions, on peut placer les sommets de l'hypercube aux points de coordonnées ± 1. Comme on a deux choix pour chacune des coordonnées, cela fait un total de $2^4 = 16$ possibilités, qui correspondent à autant de sommets. Ensuite, on peut décrire les arêtes, les faces et les hyperfaces (les "faces" de dimension 3) par des équations.

Equation d'un hyperplan

Définition 2.3. Un *hyperplan* dans un espace de dimension n est un espace de dimension $n-1$.

Les hyperplans sont l'analogue en dimension n des droites dans le plan et des plans (de dimension 2) dans l'espace (de dimension 3). Les hyperplans en dimension 4 sont des espaces de dimension 3.

On avait vu qu'une droite dans le plan était décrite par une équation linéaire de la forme $ax + by + c + 0$. On a exactement la même caractérisation pour les hyperplans :

Proposition 2.3. Un hyperplan d'un espace de dimension n, dont les coordonnées sont notées $x_1, \ldots, x_n$, est caractérisé par une équation de la forme :

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + c = 0, \text{ où } a_1, \ldots, a_n \text{ et } c \text{ sont des réels.}$$

Dans un espace de dimension 4, un hyperplan de dimension 3 est donc défini par une équation de la forme $ax + by + cz + dt + e = 0$.

Remarque 2.3. Si l'on veut obtenir des espaces de dimension plus petite, il faut prendre l'intersection entre des hyperplans : de la même manière qu'une droite est l'intersection de deux plans non parallèles, un plan est l'intersection de deux hyperplans.

L'équation d'une intersection correspond à faire le produit des équations des deux objets de départ.

De la même manière qu'un carré est délimité par les droites d'équation $x = \pm 1$ et $y = \pm 1$, un cube est délimité par les plans d'équation $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ et $z = \pm 1$, un hypercube va être délimité par les hyperplans d'équation $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$ et $t = \pm 1$.

On peut construire l'hypercube par récurrence, en translatant à chaque étape l'objet dont on dispose dans une nouvelle direction perpendiculaire. Les sommets sont donc des points, les arêtes des segments (jusque-là on n'a pas trop le choix), les faces des carrés et les hyperfaces des cubes. Bien sûr on pourrait continuer le procédé pour obtenir des hypercubes de dimension $5, 6$, etc.

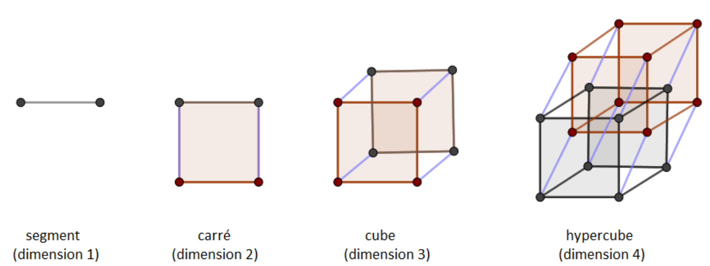


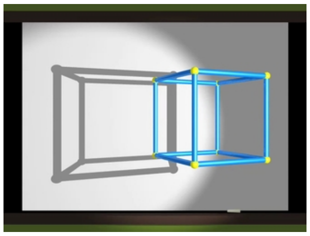
FIGURE 10 – A chaque étape, pour construire un cube qui a une dimension supplémentaire, on duplique l'objet précédent (l'objet construit précédemment est en gris, le dupliqué est en marron) et on le translate dans une direction perpendiculaire (selon les arêtes bleues).

Certaines propriétés de ces hypercubes sont faciles à identifier, par exemple le nombre de sommets ou le nombre d'hyperfaces de dimension $n-1$. Mais d'autres sont plus difficiles. Ce genre de comptage relève du domaine de la combinatoire.

Mais comment se faire une image de l'hypercube ?

On peut utiliser le même genre de techniques pour représenter des objets de dimension 4 dans un espace de dimension 3 qu'on utilise pour représenter des objets de dimension 3 dans un plan de dimension 2. Pour se donner une intuition sur ce à quoi ressemble un hypercube, on peut utiliser des *projections* : c'est ce qu'on fait quand on représente un cube en perspective cavalière au tableau.

La vidéo ci-dessous, extraite du film *Dimensions*, donne à voir ce genre de projection :



Cliquer pour voir la projection d'un cube en 2D puis d'un hypercube en 3D. La séquence visée s'arrête à 9 : 53.

On peut aussi se donner un "patron" de l'hypercube, formé d'une réunion de cubes (les hyperfaces), en indiquant les "recollements".

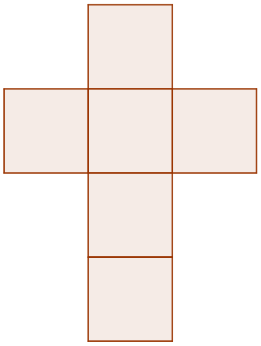


FIGURE 11 – Patron en $2D$ d'un cube

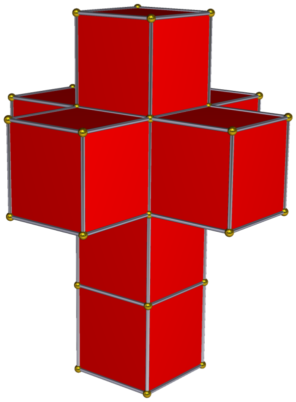


FIGURE 12 – Patron en $3D$ d'un hypercube

Pour comprendre ce que représente ce patron d'hypercube, souvenons-nous de ce à quoi ressemble un patron de cube en $3D$ (voir figure 2.3). C'est une figure constituée de carrés (les faces du cube) que l'on peut dessiner en $2D$ (sur une feuille de papier par exemple) et que l'on peut donc montrer à une fourmi bidimensionnelle. Mais ensuite, quand on veut recoller les arêtes du cube on est obligé de plier la feuille et la faire sortir du plan, ce qui est difficile à imaginer pour la fourmi.

De même, le patron de l'hypercube (voir figure 2.3 est un volume constitué de cubes (les hyperfaces de l'hypercube) et l'on doit indiquer comment recoller les faces. Ce recollement n'est pas possible en trois dimensions.

De manière plus générale, la généralisation des polygones et des polyèdres en dimensions quelconques, sont appelés *polytopes*.

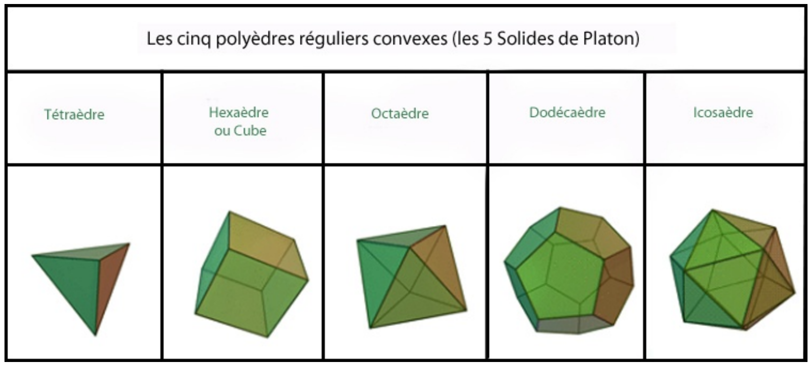


Figure 13 – Solides de Platon

De la même manière que le cube est l'un des cinq polyèdres réguliers mis en évidence par Platon dans l'Antiquité (voir figure 2.3), l'hypercube est un polytope régulier. C'est le mathématicien allemand Ludwig Schläfli (1814-1895) qui a établi au 19e siècle la classification des polytopes réguliers en dimension 4.

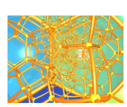
Il a montré qu'il y en avait six :
— l'hypertétraèdre (ou *simplexe*) de dimension 4, qui généralise le tétraèdre
— l'hypercube de dimension 4 (ou tesseract), qui généralise le cube
— l'hyperoctaèdre de dimension 4
— l'hypergranatoèdre (24 sommets)
— l'hyperdodécaèdre (aussi surnommé le 120 car il a 120 sommets)
— l'hypericosaèdre (aussi surnommé le 600 car il a 600 sommets)

La vidéo suivante est une représentation du plus gros d'entre eux, le 600.

Cliquer pour voir les sections du 600 à travers l'espace en 3D. La séquence visée s'arrête à 8 : 47.

La technique utilisée n'est pas la projection, mais une succession de sections de dimension 3. Cela correspondrait à faire passer un polyèdre à travers un plan, et regarder les polygones successifs dessinés sur ce plan. Une fourmi bidimensionnelle ne pourrait pas voir un un volume mais en voyant les figures planes successives obtenues quand on fait passer notre volume à travers le plan sur lequel elle vit elle pourrait s'en faire une certaine idée. Par exemple pour un cube qui passe parallèlement à son plan elle verrait un carré qui apparaît, reste un certain temps puis disparaît. Pour une sphère elle verrait un point apparaître, un cercle grandir, puis diminuer jusqu'à n'être plus qu'un point et à nouveau disparaître.

Et pour le plaisir des yeux, une plongée au sein du 120 :



Cliquer pour voir le 120 en projection stéréographique. La séquence visée s'arrête vers 9 : 50.

Ici la projection utilisée n'est pas une projection orthogonale comme pour l'hypercube précédemment, il s'agit d'une projection *stéréographique*.

Alors qu'en dimension 2 il y a une infinité de polygones réguliers convexes, qu'en dimension 3 il y a cinq polyèdres réguliers convexes, en dimension 4 il y en a 6 et dans toutes les dimensions supérieures à 5, il n'y en a que 3 (qui sont les généralisations du tétraèdre, du cube et de l'octaèdre).

Retour au problème du cochonnet Après ce petit détour vers l'univers fascinant des polytopes de dimension supérieure, revenons à notre problème de cochonnet en dimension quelconque.

Comme on a défini une distance sur $\mathbb{R}^n$, on a directement la définition d'une *hypersphère* de dimension n :

Définition 2.4. Dans $\mathbb{R}^n$, une hypersphère de centre C (un point de $\mathbb{R}^n$) et de rayon r (un nombre réel positif) est l'ensemble des points X de $\mathbb{R}^n$ tels que $d(C, X) = r$.

La aussi, on peut se demander quelle représentation on peut se faire d'une hypersphère.

On sait que si on la projette dans un espace de dimension 3, on voit une boule (de la même manière qu'on voit un disque lorsqu'on projette une sphère de dimension 3 en dimension 2). Si on regarde les sections successives par des plans de dimension 3, on voit apparaître une boule qui grossit jusqu'à atteindre un rayon 1 (si l'hypersphère de départ est de rayon 1) puis rétrécit jusqu'à disparaître.

Mais revenons pour de bon à notre problème de cochonnet.

On a vu qu'on pouvait se placer dans un repère cartésien, l'hypercube (de dimension n) qui généralise le cube de départ a pour sommets les points de coordonnées ± 1 et les hypersphères qui généralisent les sphères de départ sont de rayon 1 et centrées sur ces sommets.

On note l_n le rayon de la plus grande sphère dont le centre est l'origine et qui est tangente aux hypersphères.

La méthode pour calculer l_n est la même que pour calculer l_2 et l_3 : il faut prendre la longueur entre l'origine et l'un des sommets de l'hypercube moins le rayon des hypersphères, c'est-à-dire 1.

Or on sait calculer la distance d entre l'origine et l'un des sommets. Puisque tous les sommets ont toutes leurs coordonnées qui sont soit 1 soit -1, on a d'après la formule précédente $d = \sqrt{n}$.

D'où :

$$l_n = \sqrt{n} - 1.$$

Ça y est, on a résolu notre problème en dimension quelconque. Pour voir ce qui se passe, calculons les premiers termes :

— $l_2 \simeq 0,4142$,
— $l_3 \simeq 0,7321$,
— $l_4 = 1$,
— $l_5 \simeq 1,2361$,
— $l_6 \simeq 1,4495$,
— $l_7 \simeq 1,6458$,
— $l_8 \simeq 1,8284$,
— $l_9 \simeq 2$,
— $l_{10} \simeq 2,1623$,
— ...

Que remarque-t-on ?

Les termes l_n sont de plus en plus grands lorsque n augmente. En fait, ces distances vont même devenir arbitrairement grandes ! (En effet, la fonction $\sqrt{n}$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini).

En particulier, dans des grandes dimensions, le cochonnet va être plus gros que les boules de pétanque, puis il va même sortir de la boîte qui contiendrait nos boules de pétanque !

Ainsi, ce qu'on voit avec la suite des premiers termes, c'est que le cochonnet est plus grand que les boules de pétanque pour les dimensions supérieures à 4 et si on voulait ranger notre jeu de pétanque dans une boîte cubique dont les faces sont tangentes aux boules de pétanque, le cochonnet ne pourrait plus être contenu dans cette boîte pour les dimensions supérieures à 10 !

Si vous trouvez ça troublant c'est normal : ainsi l'intuition et l'analogie avec les dimensions 2 et 3 nous manquent vraiment pour appréhender ce caractère "hérissé" des sphères de grandes dimensions ! On peut aussi interpréter ce comportement comme une manifestations du fait que les espaces de grandes dimensions sont particulièrement "lacunaires" : un petit cube peut contenir un très gros volume, des points sont souvent très éloignés les uns des autres.

3 Des espaces de grandes dimensions, pour quoi faire ? Un exemple avec un problème de supermarché

J'espère que le problème du cochonnet vous a donné un exemple de la manière dont les mathématicien-ne-s peuvent généraliser des problèmes à des dimensions supérieures et parfois découvrir des comportements inattendus (il y a beaucoup d'autres jolis exemples, par exemple le problème du "nombre de baisers" (ou kissing number), ou encore les "sphères exotiques").

Mais rassurez-vous, vouloir étudier des espaces de dimensions supérieures n'est pas qu'une lubie abstraite de mathématicien-ne-s ! Nous avons vu quelques exemples en première partie de situations qui pouvaient se formaliser par des espaces de grandes dimensions. On peut bien sûr les traiter de manière uniquement algébrique, mais parfois cela aide d'avoir quelques représentations géométriques en tête.

3.1 Des espaces de grandes dimensions dans la vie courante

Avez-vous déjà entendu parler de *big data* ? En gros, cela désigne l'analyse de très grandes quantités de données, elles-même décrites par un très grand nombre de paramètres... cela vous rappelle-t-il quelque chose ? Eh oui, cela revient à étudier des espaces de grandes dimensions. Et souvent on essaie de dégager une structure dans ces données pour pouvoir se restreindre à un plus petit nombre de dimensions et pouvoir traiter ces données.

Or le caractère lacunaire des espaces de grandes dimensions, évoqué à la fin de la deuxième partie, pose justement problème, au point que le mathématicien américain Richard Bellman commence en 1961 à parler du "fléau" ou "malédiction de la dimension" (*curse of dimensionality*).

Je ne vais pas approfondir cet aspect (que l'on pourrait retrouver dans l'exemple des images numériques évoqué en première partie : comment trouver des sous-espaces pertinents pour faire de la reconnaissance d'images ?), je vais plutôt vous montrer comment une vision géométrique des espaces de grande dimension peut aider à résoudre des problèmes d'optimisation, particulièrement importants en mathématiques appliquées.

3.2 Un problème d'optimisation industrielle : l'algorithme du simplexe

Reprenons l'exemple d'optimisation industrielle évoqué en première partie.

Considérons un fabricant de gâteaux, qui peut produire deux articles : des madeleines et des financiers (on commence avec deux articles car dans ce cas on est en dimension 2 et les dessins sont plus faciles...).

On considère que le fabricant vend tous les articles qu'il produit et il en tire les bénéfices suivants :

— 10 euros pour 1 kg de madeleines

— 15 euros pour 1 kg de financiers

À voir seulement les bénéfices, on pourrait penser qu'il a intérêt à produire uniquement des financiers et pas de madeleines. Néanmoins il faut tenir compte des contraintes imposées par des quantités de ressources limitées. Pour produire ses pâtisseries, le fabricant doit utiliser de la farine, du beurre et du sucre et il a des stocks limités de chacune de ces ressources. Si les financiers nécessitent trois fois plus de beurre que les madeleines, il est beaucoup moins évident que la situation où seulement des financiers sont produits est optimale.

Le tableau suivant résume pour notre exemple les quantités de ressources nécessaire pour la production de chaque article ainsi que les stocks disponibles.

Ressources pour 1kg	Madeleines	Financiers	Stocks
Farine	$0,3$ kg	$0,3$ kg	30 kg
Beurre	$0,2$ kg	$0,6$ kg	40 kg
Sucre	$0,3$ kg	$0,25$ kg	25 kg

Le problème que cherche à résoudre le fabricant est : comment ajuster au mieux ma production (*ie* choisir quelles quantités produire de chaque article) pour maximiser mes bénéfices tout en respectant les limites des stocks ?

Comment modéliser mathématiquement ce problème ?

On a vu en première partie que l'ensemble des configurations envisageables pour le fabricant est un espace à deux variables :

— x_1 = quantité de madeleines produites (en kg)

— x_2 = quantité de financiers produits (en kg).

Le bénéfice s'exprime alors par la fonctin suivante, que l'on cherche à optimiser : $b(x_1, x_2) = 10x_1 + 15x_2$.

Et les contraintes se traduisent par les inégalités suivantes :

— farine : $0,3x_1 + 0,3x_2 \leq 30$

— beurre : $0,2x_1 + 0,6x_2 \leq 40$

— sucre : $0,3x_1 + 0,25x_2 \leq 25$

En effet, si l'on prend l'exemple du sucre, $0,3$ correspond au nombre de kilos de sucre utilisés par kilo de madeleines et $0,25$ au nombre de kilos de sucre par kilo de financiers, donc $0,3x_1 + 0,25x_2$ correspond à la quantité de sucre utilisée dans la situation (x_1, x_2). Cette situation est réalisable uniquement si cette quantité n'excède pas les 25 kg de sucre en stock.

On peut traduire toutes ces contraintes géométriquement (voir figure 3.2). En effet, si l'on se place dans un repère dont les axes sont x_1 et x_2, le cas d'égalité des contraintes de ressources (l'équation $0,3x_1 + 0,3x_2 = 30$ pour la farine par exemple) définissent des droites et les inéquations définissent les demi-plans en-dessous de ces droites. De plus, les quantités produites sont positives donc finalement les situations permises par les contraintes sont tous les points à l'intérieur du polygone coloré.

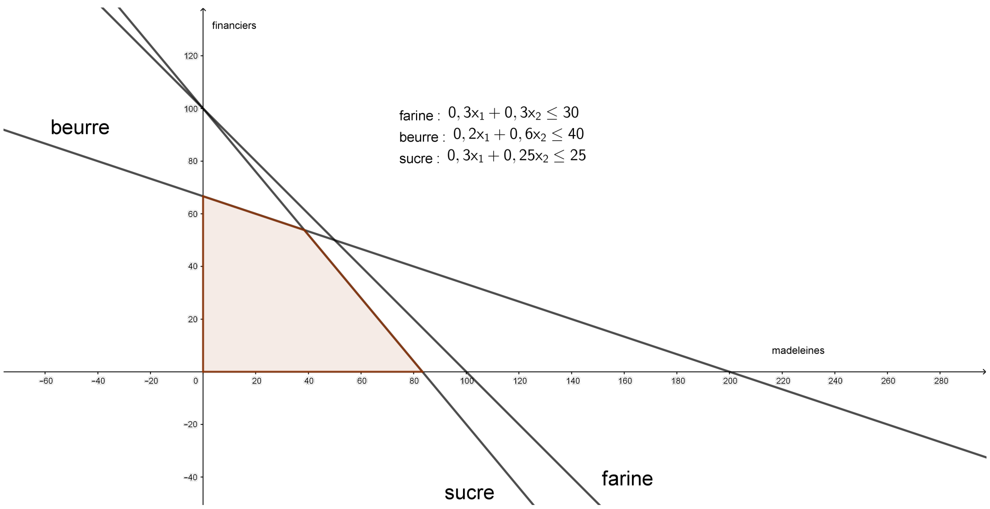


Figure 14 – Le polygone coloré correspond à toutes les situations autorisées pour respecter les contraintes.

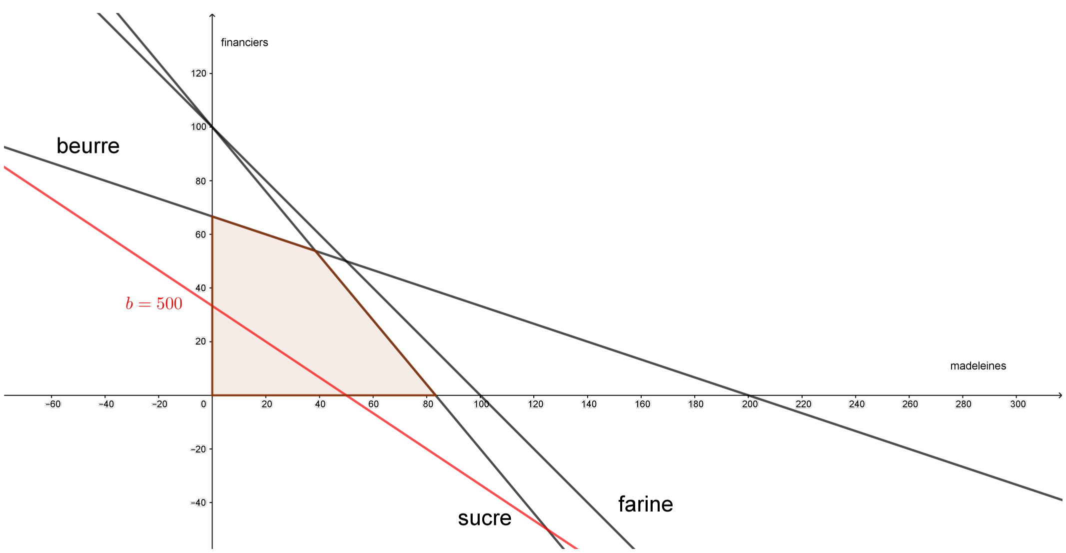


Figure 15 – La droite rouge correspond à toutes les situations où le bénéfice est de 500 euros

Comment trouver les points qui réalisent le maximum de la fonction bénéfice ?

La fonction bénéfice est une fonction linéaire, donc l'ensemble des situations qui permettent le même bénéfice forment une droite (voir figure 3.2).

Augmenter le bénéfice correspond à translater cette droite vers le haut.

On se rend compte que si on déplace cette droite dans le sens du bénéfice croissant, on finit par atteindre le bord du polygone autorisé. Ainsi, le maximum de la fonction bénéfice est atteint en un sommet du polygone. Si la pente de la fonction était différente, le maximum pourrait être atteint en un autre sommet du polygone, voire sur un côté entier si la droite était parallèle à ce côté.

Que se passe-t-il en dimension supérieure, c'est-à-dire lorsque le fabricant a plus de deux articles à produire ?

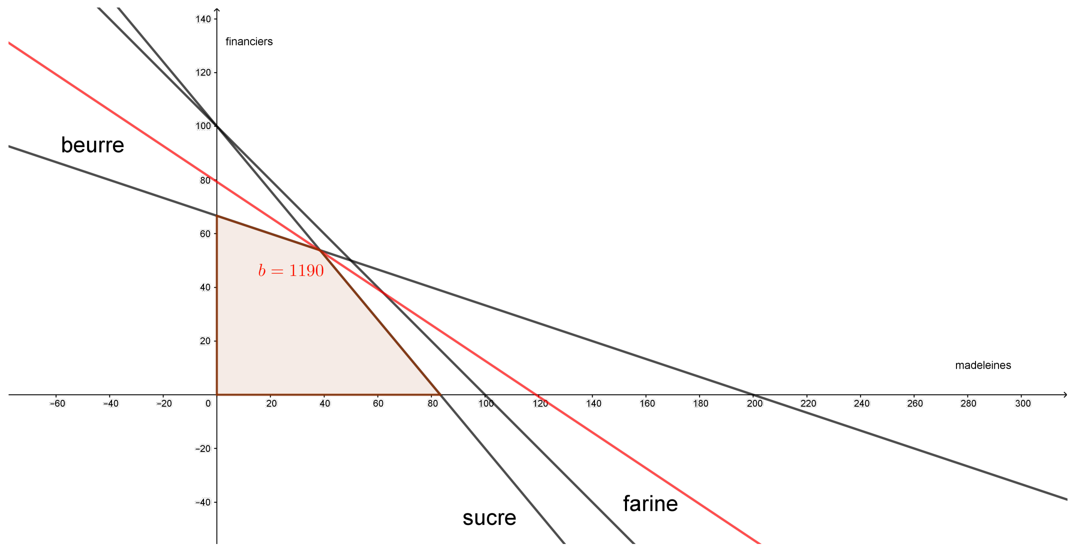


FIGURE 16 – Situation autorisée par les contraintes et qui maximise le bénéfice.

On peut modéliser le problème exactement de la même façon, avec autant de variables que d'articles (posons n le nombre d'articles) et des inéquations pour les contraintes. Si l'on représente cela dans un espace de dimension n, les équations linéaires définissent cette fois des hyperplans et l'intersection des demi-hyperplans définis par les contraintes forme un polytope. Ce que nous enseigne la vision géométrique du problème en dimension 2, c'est que le maximum de la fonction bénéfice va encore une fois être atteint en un sommet du polytope. En théorie il suffirait donc de calculer la valeur du bénéfice en chaque sommet. Néanmoins ces polytopes possèdent souvent un trop grand nombre de sommets pour qu'on puisse tous les tester rapidement. On utilise donc un algorithme qui permet de se déplacer le long des arêtes du polytope en faisant décroître la fonction bénéfice. Cette méthode s'appelle *l'algorithme du simplexe*, mais c'est une autre histoire...

4 Quelques ressources sur le sujet

Pour un voyage en quatrième dimension, je ne peux que trop recommander l'immersion proposée par Jos Leys, Étienne Ghys, Aurélien Alvarez dans le film *Dimensions*, que vous pourrez trouver à l'adresse suivante :

http://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm

Le site donne également un très riche contenu didactique et c'est de la page consacrée à la quatrième dimension (chapitres 3 et 4) que proviennent toutes les animations et plusieurs illustrations utilisées dans cet exposé :

http://www.dimensions-math.org/Dim_CH3.htm

De très bonnes chaînes de vulgarisation ont également consacré des vidéos sur le sujet, en particulier celle de Mickaël Launay, alias Micmaths :

https://www.youtube.com/watch?v=LQFkUjYzOn8&list=PLNefH6S6myiOfykOcgIc2sYrpr1Zk5Mhi

Plus spécifiquement il ya deux chaînes anglophones qui ont abordé le problème du cochonnet (pas sous ce nom !) :

3blue1brown :

http://www.3blue1brown.com/videos/2017/8/11/a-trick-to-visualizing-higher-dimensions

numberphile :
https://www.youtube.com/watch?v=mceaM2_zQd8