Comment envoyer une théière dans l'espace ?

Adrien Ellis

23 octobre 2017

Maths

Pour Tous

Séminaire "Maths Pour Tous"

Table des matières

Introduction

A quelle vitesse faut-il lancer une théière en l'air pour qu'elle échappe à l'attraction gravitationelle de la terre, et continue sa trajectoire dans l'espace au lieu de se briser en retombant par terre ? La question peut paraitre futile présentée de cette manière, elle prend cependant tout son sens si on s'imagine vouloir envoyer une sonde spatiale ou un vaisseau dans une autre galaxie.

Théière ou sonde, c'est du pareil au même pour physiciens et mathématiciens, qui vont abstraire les éléments erssentiels du problème dont dépend la réponse à la question. Nous allons donc d'abord mettre au point un modéle physique de la situation qui nous occupe, en quelque sorte une traduction en langage mathématique du problème concret.

Une fois le problème ainsi reformulé, nous explorerons les outils mathématiques dont nous aurons besoin pour parvenir à une solution, c'est-a-dire en particulier la théorie de l'intégration. Cette progression de l'argument qui nous mène du concret vers l'abstrait et, à travers l'application de résultats mathématiques, de nouveau au concret illustre les aller-retours qui existent entre les mathématiques et les autres domaines du savoir. Nous essayerons aussi de montrer comment les outils que nous dévelloppons soulèvent de manière organique d'autres questions que celles qui relèvent du stricte cadre de la résolution du problème de la théière dans l'espace, dans le but de faire comprendre comment on peut en arriver à faire des maths sans se soucier forcément des applications qui vont derrières. La démarche qui consiste à creuser jusqu'au bout les sujets étudiés, n'est en effet pas une spécificité mathématiques, et l'on comprends aisément qu'une fois que l'intégration est établie comme un outil important de par ses applications à la physisque, il devient intéressant de l'étudier en tant que concept mathématique.

1 La physique de base

On pose dans cette section les connaissances physiques de base sur lesquels nous nous basons pour progresser, à savoir les définitions de l'énergie cinétique, l'énergie potentielle, le principe de conservation de l'énergie, et la formule due à Newton exprimant la force gravitationelle entre 2 corps.

Lorsqu'un objet est lancé en l'air il perd de la vitesse en montant, alors qu'il se déplace à l'encontre de la force de pesanteur. A l'inverse, l'attraction terrestre lui fait gagner de la vitesse à sa chute, tout en lui faisant perdre de la hauteur. Cette dualité est exprimé en physique à travers les concepts d'énergie potentielle et cinétique, et de conservation d'énergie. Il est donc intéressant d'étudier les relations entre ces concepts pour résoudre notre problème.

Remarque 1. Pour alléger l'écriture, et ceci n'étant pas un cours de physique, les unités de mesures seront omises. Toute les formules sont données en fonction de quantités en unités SI.

1.1 Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un corps, que nous noterons E_c, est la part de son énergie qui est due à son mouvement. Cette quantité est une fonction de la masse de l'objet, notée m, et de sa vitesse, notée v, et est donnée par la formules suivante :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1}$$

1.2 Energie potentielle

La deuxième forme d'énergie qui nous intéresse est l'énergie potentielle : c'est l'énergie des objets en hauteurs. Elle mesure la capacité de l'objet à gagner de la vitesse et donc de l'énergie cinétique en tombant. A la surface de la terre, un objet de masse m placé à une hauteur h au dessus d'un point de référence, l'énergie potentielle E_p est donnée par la formule :

$$E_p = mgh \tag{2}$$

où g est une constante liée à l'attraction terrestre : c'est la force par kilogramme avec laquelle la terre attire chaque objet à sa surface et vaut environ $9,8\ N\, kg^{-1}$.

1.3 Conservation d'énergie

C'est un principe fondamentale beaucoup utilisé en physique : l'énergie totale d'un système est conservée. Dans notre cadre cela revient à dire que la somme de l'énergie potentielle et cynétique d'un objet est constante : l'énergie cynétique perdue quand un objet s'éloigne de la terre est gagnée sous forme d'énergie potentielle, et quand un objet perd de l'énergie potentielle en tombant vers la terre il gagne la même quantité d'énergie cynétique en prenant de la vitesse. Ce principe va nous être très utile par la suite, d'une manière que l'on illustre dans l'exemple qui suit.

Exemple 1. *Si un objet est jeté vers le haut avec une vitesse verticale de* $4\,m\,s^{-1}$*, son énergie à la hauteur du sol n'est composée que d'énergie cynétique, car sa hauteur par rapport au sol est* 0*. Son énergie* E_0 *au moment d'être lancé est donc*

$$E_0 = \frac{1}{2}m \times 4^2 = 8m$$

Au point le plus haut de la trajectoire de l'objet, juste au moment ou il commence à retomber, sa vitesse est nulle, et donc son énergie cynétique aussi. L'énergie de l'objet au point le plus haut E_1*, est donc l'énergie potentielle de l'objet à sa hauteur maximale* h_{max} *:*

$$E_1 = mgh_{max}$$

Par le principe de conservation de l'énergie on a

$$E_1 = E_0$$

Ce qui permet de trouver h_{max}

$$h_{max} = \frac{8}{g} \approx 80\,cm$$

1.4 L'attraction Gravitationnelle

Pourquoi ne pas utiliser le même procédé que dans l'example précédent pour calculer la vitesse à laquelle il faut envoyer une théière pour l'envoyer à une certaine hauteur h ? La formule pour l'énergie n'est en fait valide que très proche de la suface terrestre. Cela provient de la dépendence à la distance du centre de la Terre de la constante g d'accélération due à la gravité : à plus forte distance de la terre, l'attraction terrestre est plus faible qu'à la surface de la Terre. Une chute de 1 m proche de la Terre représente ainsi un transfert d'énergie bien plus important qu'une chute de 1 m à un point plus éloigné dans l'espace.

La force de gravitation est décrite par une loi, formulée par Isaac Newton à la fin du 17ème siècle, exprimant la magnitude F de l'attraction entre deux objets de masses M et m, séparés d'une distance r :

$$F(r) = G\frac{Mm}{r^2}$$

G est une constante dont la valeur est mesurée de manière expérimentale et donc supposée connue. La force exercée par la Terre sur un objet est donc proportionnelle à la masse de l'objet et à l'inverse du carré de la distance entre l'objet et le centre de la Terre.

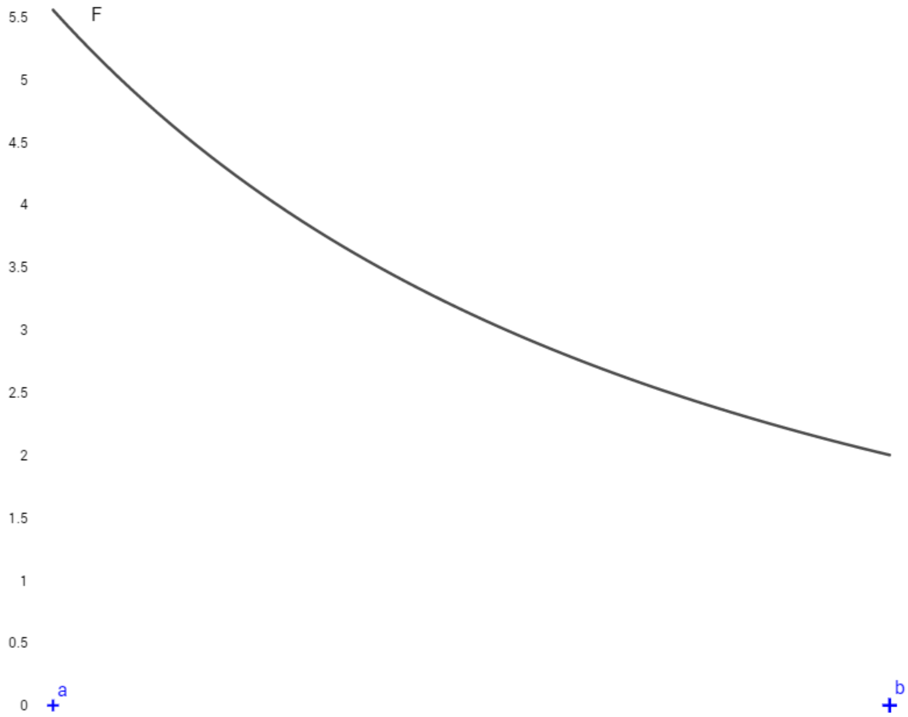

Figure 1 – Graphe de l'intensité de la gravité en fonction de la distance de la Terre, entre un point a et un point b : sur l'axe des abscisses on a la distance au centre de la Terre, sur les ordonnés la force d'attraction à cette distance. Plus l'on s'éloigne du centre de la Terre, plus la force est faible.

Cette force d'attraction est à la source de la différence d'énergie potentielle entre deux points a et b à des distances différentes de la Terre.

En effet, on peut voire cette énergie potentielle comme l'énergie qu'il faut dépenser pour se déplacer contre la force de gravité F pour aller de a à b, ou comme l'énergie relachée sous forme d'énergie cinétique lorsque l'objet est tiré par la force de b à a.

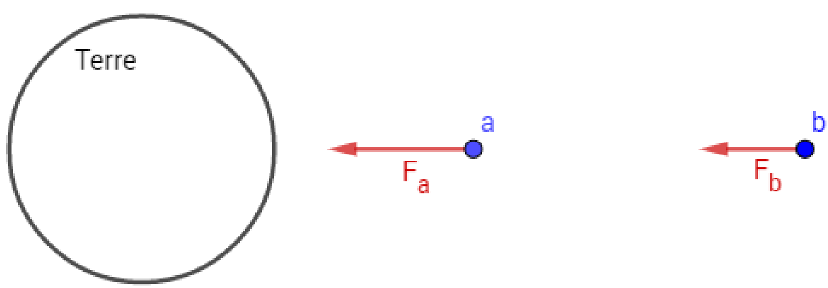

Figure 2 – L'énergie qu'il faut dépenser pour déplacer un objet du point a au point b contre la force F représentée par les flèches rouges, est égale à la différence entre l'énergie potentielle de l'objet en b et son énergie potentielle en a.

L'énergie E nécessaire au déplacement d'un objet sur une distance d contre une force **constante** F' est donnée par

$$E = F' \times d.$$

Cette formule et la loi de la gravitation permettent de retrouver la formule de l'énergie potentielle donnée dans la section 1.2. En effet, la constante g n'est rien d'autre que le calcul de $G\frac{M_T}{R^2}$ où M_T est la masse de la Terre et R son rayon. On a donc :

$$gm = G\frac{M_T m}{R^2}$$

et gm est donc la force de gravité exercé sur l'objet de masse m. L'énergie potentielle est ainsi le produit $F \cdot h$ de cette force F et de la distance h sur laquelle cette force est appliquée quand l'objet tombe de cette hauteur jusqu'au niveau 0 qui correspond à la surface de la Terre.

On peut aussi utiliser ce qui prédède pour justifier l'utilisation de g comme s'il s'agissait d'une constante au environ de la surface terrestre. Une centaine de mètre est tellement petit par rapport au rayon R de la Terre que le facteur $\frac{1}{r^2}$ ne varie que de manière négligeable (par rapport à la précision du calcul souhaitée et des mesures de masse et de hauteur) quand il est évalué avec pour $r = R$ ou $r = R + 100$. Sur des petites distances autour de la surface de la Terre, il est donc acceptable d'approximer la force de gravité par sa valeur à la surface de la Terre.

2 Méthode d'approximation

Le but est maintenant d'arriver à calculer l'énergie nécessaire pour se déplacer d'un point a à un point b comme dans la figure 2, en prenant en compte la variabilité de l'attraction terrestre en fonction de la distance au centre de la Terre. Nous allons pour ce faire nous inspirer de nos remarques à la fin de la section précédente :

1. Il est raisonnable d'approximer la force de gravité par une constante dans une petite zone où la distance au centre de la Terre change peu.
2. On sait calculer l'énergie nécessaire à un déplacement contre une force constante

2.1 Construction de l'intégrale

Comment faire pour utiliser la seule formule à notre disposition, qui ne marche que pour les forces constante ? On peut approximer la fonction F par des constantes sur des morceaux de l'interval $[a, b]$. On découpe cet interval en trois morceaux de tailles égales, donc de longueur

$$\Delta x = \frac{b-a}{3}.$$

On obtient ainsi 3 intervals plus petit sur lesquels on approxime F par sa valeure au début de l'interval. Cette construction est illustrée par la figure suivante :

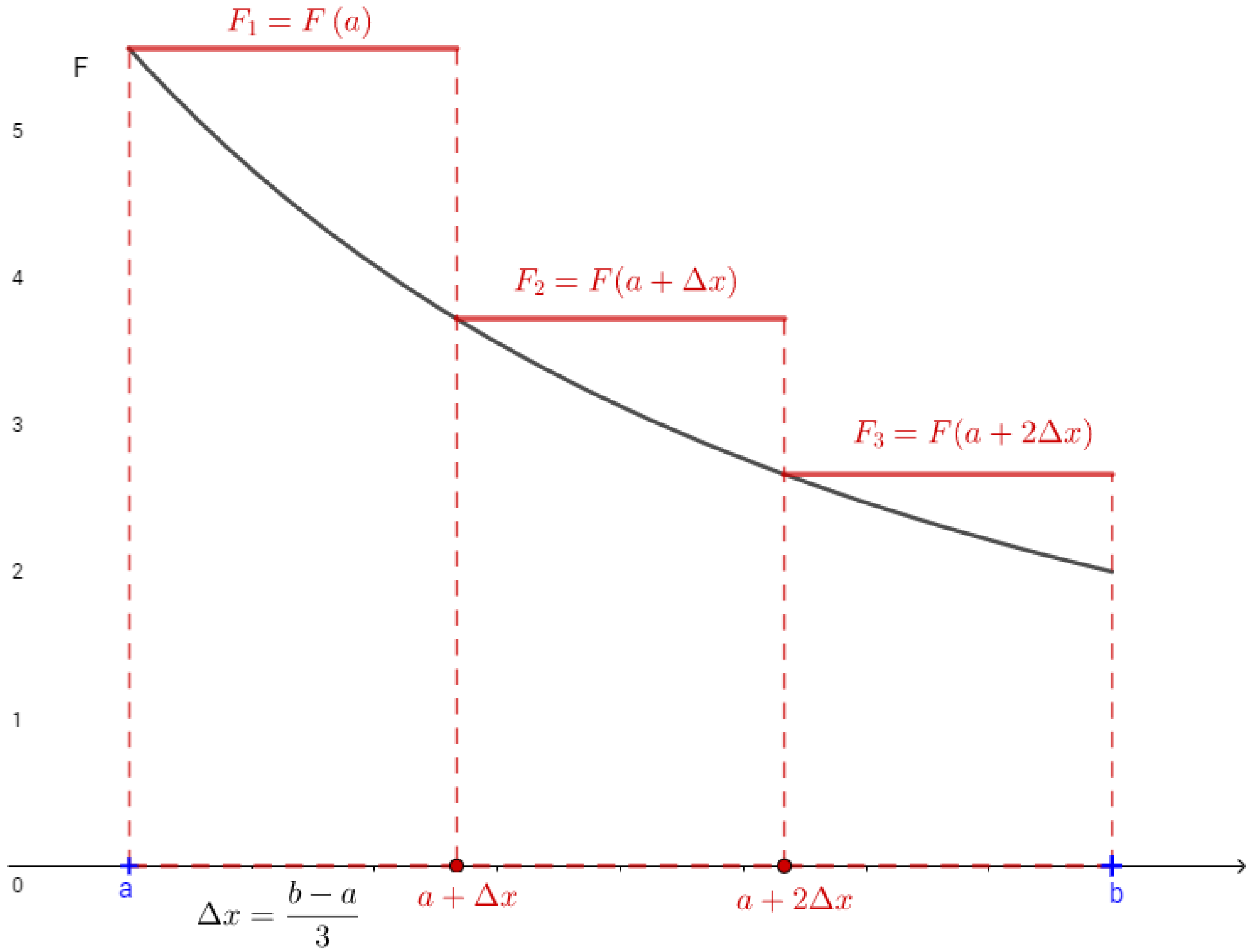

FIGURE 3 – La fonction F représentée par la courbe noire entre a et b est approximée par une fonction constante sur 3 plus petits intervals, réprésentée par les segments rouges épais. La somme des aires des rectangles rouges formés avec les pointillés est l'énergie nécessaire pour aller de a à b contre la force décrite par le graphe en rouge.

Nous savons calculer l'énergie dépensée pour aller de a à b contre la force dont le graphe est tracé en trait continu rouge dans la figure 3, c'est-à-dire contre une force égale à $F(a)$ sur l'interval $[a, a+\Delta x]$, $F(a+\Delta x)$ sur $[a+\Delta x, a+2\Delta x]$ et $F(a+2\Delta x)$ sur $[a+2\Delta x, b]$. Cette énergie est en effet égale à l'énergie nécessaire pour aller de a à $a+\Delta x$, puis de $a+\Delta x$ à $a+2\Delta x$ et enfin de $a+2\Delta x$ à b. Sur chacun de ces intervals, la force est constante et on peut donc utiliser notre formule pour calculer les termes de cette somme. Pour aller de a à $a+\Delta x$, on effectue un déplacement sur une distance Δx contre une force constante égale à $F(a)$, ce qui correspond à une énergie donnée par :

$$F(a) \cdot \Delta x.$$

Sur l'interval $[a+\Delta x, a+2\Delta x]$, on parcoure la même distance Δx contre une force égale à $F(a+\Delta x)$, pour une énergie

$$F(a+\Delta x) \cdot \Delta x,$$

et le même raisonnement nous permet d'obtenir l'énergie nécessaire au déplacement de $a+2\Delta x$ à b :

$$F(a+2\Delta x)\cdot\Delta x.$$

On obtient donc une première estimation grossière, notée S_3, de l'énergie que l'on cherche à calculer :

$$S_3 = F(a)\cdot\Delta x + F(a+\Delta x)\cdot\Delta x + F(a+2\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Cette estimation est peu précise : la fonction avec laquelle on tente d'approximer la fonction F, en rouge dans la figure 3 n'est pas toujours très proche de la courbe noire qui est le tracé du graphe de F. Comme on l'a remarqué plus haut, la fonction F varie peu sur des petits intervals : notre approximation est mauvaise car les intervals sur lesquels on approxime F par une constante sont trop grands. On peu donc trouver une meilleure approximation en découpant l'interval $[a,b]$ en plus de 3 morceaux. La figure suivante illustre l'approximation obtenue par un procédé similaire en découpant l'interval en 12 :

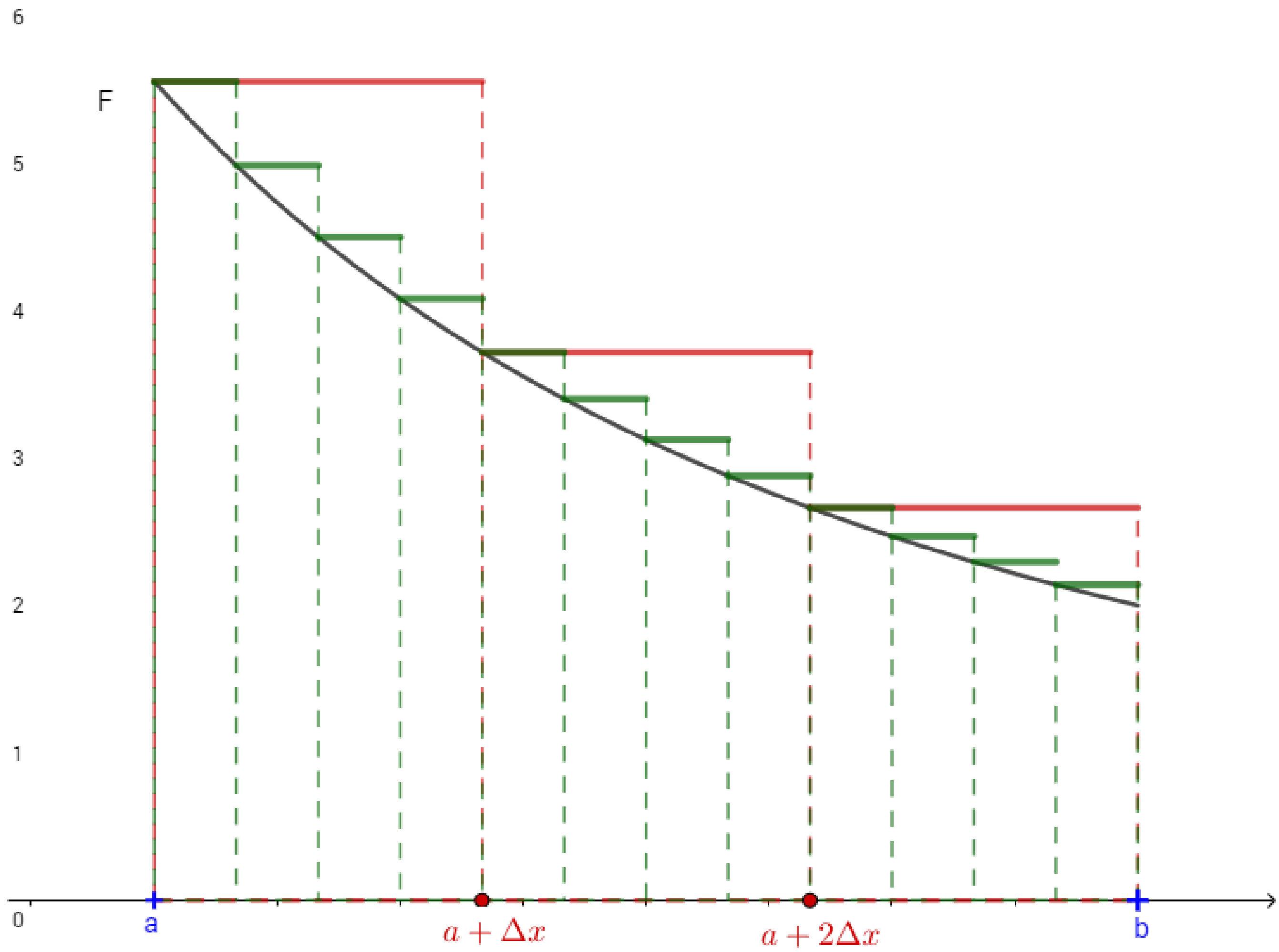

FIGURE 4 – La fonction F est mieux approximé par le graphe vert de la fonction constante sur des intervals de longueure $\frac{b-a}{12}$ que par une approximation par trois constantes illustrée par le graphe en rouge.

On obtient ainsi comme pour S_3 une meilleure estimation de l'énergie que l'on cherche à calculer, que l'on note S_{12} :

$$S_{12} = F(a)\cdot\frac{b-a}{12}+F\left(a+\frac{b-a}{12}\right)\cdot\frac{b-a}{12}+F\left(a+2\cdot\frac{b-a}{12}\right)\cdot\frac{b-a}{12}+\cdots+F\left(a+11\cdot\frac{b-a}{12}\right)\cdot\frac{b-a}{12}.$$

Pour chaque nombre entier n on peut construire de manière similaire une approximation S_n en découpant $[a,b]$ en n morceaux de longueure $\frac{b-a}{n}$. On obtien donc les n intervals $[a, a+\frac{b-a}{n}]$, $[a+\frac{b-a}{n}, a+2\cdot\frac{b-a}{n}]$, ... , $[a+(n-1)\cdot\frac{b-a}{n}, b]$. Sur chaque interval de la forme $[a+k\cdot\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\cdot\frac{b-a}{n}]$ où $0 \leq k < n$, on approxime la force F par la constante $F\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)$ et on approxime l'énergie necessaire pour traverser cet interval par le produit de la force constante et de la longueure soit :

$$F\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}.$$

L'approximation S_n de l'énergie nécessaire au déplacement de a à b est la somme des quantités d'énergie nécessaires à la traversée de chaque petit interval :

$$S_n = F(a) \cdot \frac{b-a}{n} + F\left(a + \frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n} + \cdots + F\left(a + (n-1) \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Quand n devient grand, cette suite de nombre S_n s'approche de plus en plus et arbitrairement proche d'un nombre que l'on appelle l'intégrale de F entre a et b, et que l'on note

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x.$$

La suite S_n ayant été construite pour s'approcher de plus en plus de l'énergie nécessaire pour aller de a à b, cette énergie est égale à l'intégrale de F entre a et b, et il nous faut donc calculer cette intégrale.

2.2 Interprétation graphique

En revenant à la figure 3, on peut remarquer que l'énergie nécessaire à traverser chaqun des trois petits intervals est égale à l'aire du rectangle formé par les pointillés rouges et le segment en rouge épais au dessus de cet interval. Prenons par exemple le premier rectangle au dessus de l'interval $[a, a + \Delta x]$: sa hauteure est égale à la constante $F_1 = F(a)$, sa largeure est égale à la longueur de l'interval soit Δx, et son aire est donc :

$$F_1 \cdot \Delta x,$$

soit exactement l'approximation proposée pour l'énergie nécessaire à aller de a à $a + \Delta x$. L'approximation S_3 est donc la somme des aires des rectangles rouges. De même, S_{12} est la somme des aires des rectangles verts dans la figure 4. On voit en plus dans cette figure, que la somme des aires des rectangles verts est assez proche de l'aire comprise entre la courbes de F, l'axe des abscisses, et les droites $x = a$ et $x = b$. Plus n est grand, plus la somme S_n des aires des n rectangles formés dans la construction de S_n s'approche de l'aire sous la courbe de F. On trouve donc une autre interprétation graphique de

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$$

en tant que l'aire sous la courbe de F entre a et b.

3 Intégration

L'intégration est la théorie mathématique qui s'occupe de définir, d'étudier et de calculer les intégrales. On a dit plus haut que plus n était grand, plus notre approximation était précise, et qu'en choisissant n assez grand, on pouvait s'approcher arbitrairement près du nombre recherché. Le but de cette section est de formaliser mathématiquement le sens de cette phrase et de poser les bases nécéssaires à la démonstration du théorème qui nous permettra de finalement calculer la fameuse intégrale dont nous avons besoin pour résoudre le problème.

3.1 Limites

Le concept de s'approcher de plus en plus d'une valeur, tout en s'approchant arbitrairement près, est formalisé en mathématique grâce à la notion de limite d'une suite de nombres. On commence par définir une suite réelle :

Définition 1. Une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On note a_n les valeurs de $a(n)$. Autrement dit une suite est juste une liste de nombres :

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$$

Nous voudrions maintenant pouvoir dire que plus n est grand, plus les termes S_n de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnent une approximation précise d'un nombre qui correspond à l'air sous la courbe F. C'est exactement ce qu'exprime le concept de limite, que l'on formalise mathématiquement dans ce qui suit.

Pour comprendre la définition d'une limite nous allons nous appuyer sur l'image ci-dessous, qui est la représentation des premiers termes d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous la formes des points de coordonnées (n, a_n) :

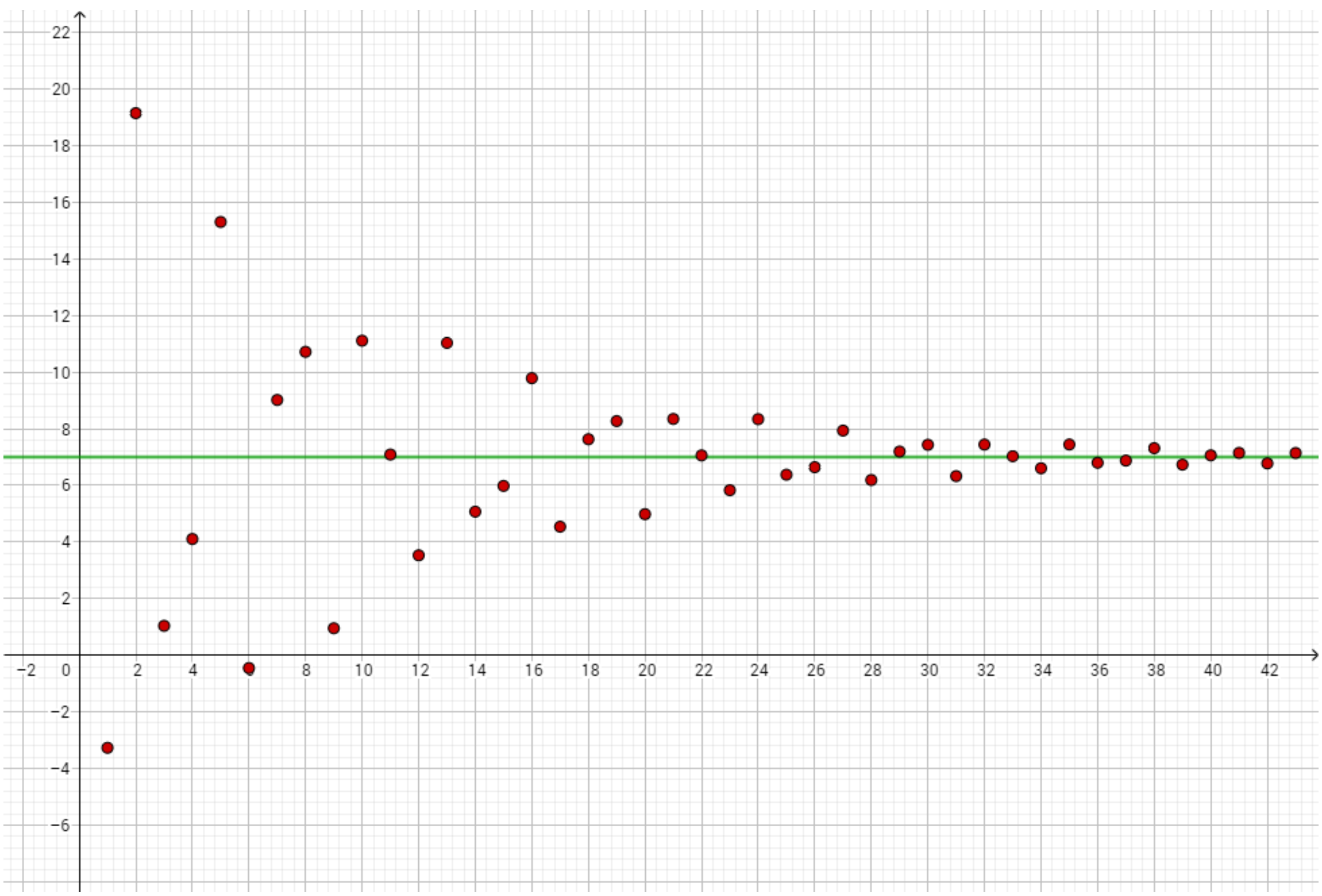

Figure 5 – Nous allons formaliser le fait que la a_n dans le graphique converge vers le nombre 7, représentée par la droite $y = 7$ en vert.

Nous voulons formaliser le fait que les éléments a_n de la suite sont arbitrairement proches de 7 en ne regardant que ceux avec n assez grand. On exprime rigoureusement le fait d'être arbitrairement proche en disant que les élément a_n sont à une distance de 7 inférieure à un nombre $\epsilon > 0$ pour n assez grand, et ce **pour n'importe quel ϵ aussi petit soit-il**. Il ne nous manque plus qu'a formaliser le sens de "la propriété est vraie pour n assez grand", ce que l'on fait en demandant qu'il existe un N tel que la propriété soit vraie pour tous les a_n à droite de a_N dans une image similaire à la figure 5, c'est-à-dire avec $n \geq N$. On obtient ainsi la définition rigoureuse suivante :

Définition 2. On dit qu'une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}$, ou que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l quand n tend vers l'infini si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les termes a_n de la suite, c'est-à-dire tous ceux tels que $n \geq N$, sont à une distance de l inférieure à ϵ. En écriture mathématique :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ |a_n - l| < \epsilon$$

ou $\forall$ veut dire "pour tout" et $\exists$ "il existe". La distance entre les deux nombres a_n et l est donnée par $|a_n - l|$
On écrit alors

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l,$$

ou

$$a_n \to l \qquad \text{quand} \qquad n \to \infty$$

et on dit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si elle admet une limite.

On démontre dans la section Annexe que la suite (S_n) converge bien vers une limite.

Nous avons donc défini rigoureusement le nombre que l'on cherche pour résoudre notre problème, sans pour autant progresser dans la direction de l'évaluation de ce nombre. C'est ce que va nous permettre de faire le théorème fondamental de l'analyse, que nous allons démontrer dans le chapitre suivant. Avant de nous attaquer à ce théorème centrale en mathématiques, nous allons toutefois faire quelques remarques sur la généralité de la méthode employée ci dessus pour définir l'aire sous la courbe d'une fonction, et en particulier sur le fait que cette méthode est applicable à une large classe de fonctions, appelés fonctions continues. Nous allons donc d'abord introduire les fonctions continues, dont nous aurons aussi besoin pour comprendre le théorème fondamental de l'analyse.

3.2 Fonctions continues

L'essentiel de ce qui a été présenté plus haut est de dire que la fonction $F(x)$ peut être approximé par une suite de fonctions constantes sur de petits intervals. Le reste consiste à justifier cette méthode sur le plan technique, en montrant qu'on peut rendre cette approximation aussi précise que souhaité. Nous ne le démontrerons pas ici, mais cette méthode est en fait généralisable à toutes les fonctions que l'on peut raisonablement approximer par une constante sur des intervals assez petit. Autrement dit les fonctions f définis sur l'interval $[a, b]$ et pour lesquelles, en chaque point x de $[a, b]$, il existe un petit interval autour de x sur lequel f prend des valeurs proche de la valeur de f en x. C'est exactement la définition des fonctions continues : une fonction f est continue en un point c si ses valeures $f(x)$ sont arbitrairement proche de $f(c)$ si l'on se restreint à x assez proche de c. Plus précisément, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre δ tel que pour tout les x dont la distance à c est inférieure à δ, la distance entre $f(x)$ et $f(c)$ est inférieure à ϵ. La figure ci-dessous illustre la définition d'une fonction continue :

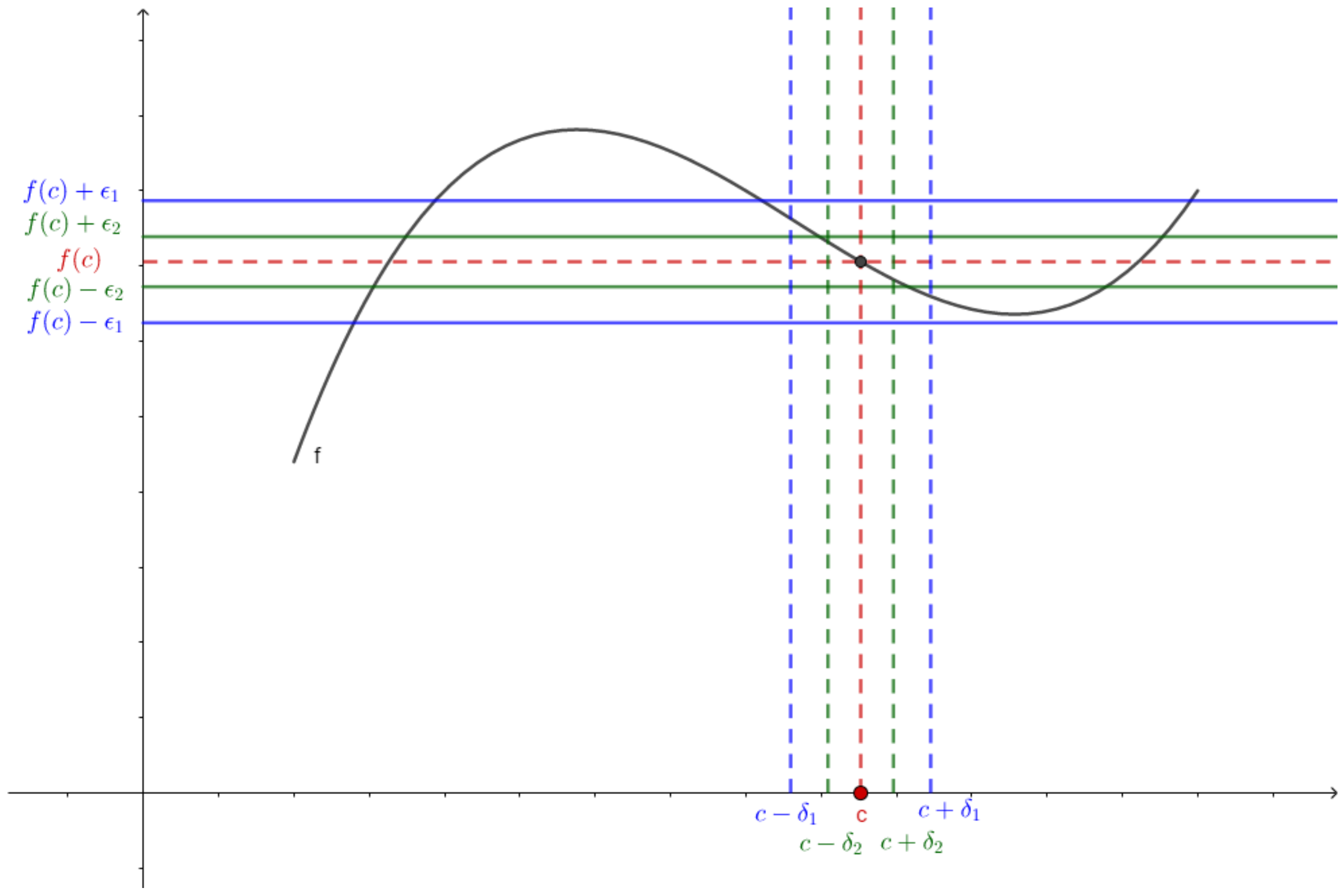

FIGURE 6 – La fonction f dont le graphe est la courbe noire est continue en c. Les valeurs de f sur un interval assez petit autour de c restent à une distance inférieure à ϵ_1 de $f(c)$. Les points dont l'ordonnée est à une distance inférieure à ϵ_1 sont ceux compris entre les deux droites bleues pleines. On voit bien que sur l'interval $[c-\delta_1, c+\delta_1]$ entre les droites bleues en pointillés, les valeurs de f sont bien comprise entre les droites bleues pleines. De même, on exhibe un nombre δ_2 tel que si x est à une distance de c inférieure à δ_2, la distance entre $f(x)$ et $f(c)$ est bien inférieure à ϵ_2. On pourrait trouver un tel δ pour n'importe quelle valeure de ϵ, f est donc continue en c.

La définition rigoureuse rédigée en langage mathématique est la suivante :

Définition 3. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue en $x \in [a,b]$ si $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tel que $\forall y \in [a,b]$ on a

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon,$$

où le symbole $\implies$ se lit "implique que". On dit que f est continue sur $[a,b]$ si f est continue en tout $x \in [a,b]$.

On peut encore voir cette définition de la manière suivante : si y est assez proche de x, $f(y)$ reste arbitrairement proche de $f(x)$. Sur un petit interval autour de x, f peut donc etre approximée par la constante $f(x)$.

4 Théorème fondamental de l'analyse

4.1 Différentiation

Pour comprendre et introduire ce théorème, on se penche rapidement sur la relation entre vitesse et déplacement d'un objet bougeant sur une ligne droite. Supposons que l'on décrive la position x de l'objet sur cette droite en fonction d'une variable de temps t, et de même pour sa vitesse $v(t)$. On rappelle au préalable que pour une vitesse constante u sur une période de temps de durée T, la déplacement d est donné par $d = uT$, ou alternativement

$$u = \frac{d}{T}.$$

En général, pour trouver la distance parcourue dans l'interval de temps $a \leq t \leq b$, on raisonne comme précédement : si v varie peu quand t varie d'une petite quantité $\Delta t = \frac{b-a}{n}$ pour un entier n, on peut approximer $v(t)$ par

$$v(a + k\Delta t) \text{ sur l'interval } [a + k\Delta t, a + (k+1)\Delta t]$$

pour k entier entre 0 et $n - 1$. La vitesse étant l'expression du nombre de mètres parcourus par seconde, la distance couverte pendant ces intervals de temps est simplement approximée par

$$v(a + k\Delta t) \cdot \Delta t,$$

de sorte que la déplacement total est approché par

$$\sum_{k=0}^{n-1} v(a + k\Delta t) \cdot \Delta t$$

qui tend, comme on l'a expliqué plus haut vers l'intégrale

$$\int_a^b v(t)\mathrm{d}t.$$

Penchons nous maintenant sur le problème inverse : comment trouver la vitesse au temps $t = T$ si l'on ne dispose que de la fonction $x(t)$? Si on se place dans un interval de temps court Δt, pendant lequel la distance parcourue est $x(T + \Delta t) - x(t)$, on peut approximer la vitesse instantatnée au temps T par la vitesse moyenne entre T et $T + \Delta t$:

$$\frac{x(T + \Delta t) - x(T)}{\Delta t}.$$

Evidemment, on voudrait dire que plus Δt est petit plus cette approximation est bonne, ce qui motive notre généralisation du concept de limite pour les fonctions :

Définition 4. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que l est la limite de f en $x \in [a, b]$ si
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tel que $\forall y \in [a, b]$ on a

$$0 < |x - y| < \delta \implies |l - f(y)| < \epsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{y \to x} f(y) = l$.

La vitesse est donc la limite de $\frac{x(T+\Delta t)-x(T)}{\Delta t}$ quand Δt tend vers 0. C'est la définition de la dérivé de $x(t)$ en T :

Définition 5. Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en $x \in (a, b)$ si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe. On appelle alors cette limite dérivé de f en x. Si f est dérivable en tout point de (a, b) alors elle est dite dérivable sur (a, b). On note dans ce cas $f'(x)$ la dérivé de f en x.

On a donc

$$v(t) = x'(t).$$

La réciprocité remarquée plus haut entre dérivation et intégration est exprimée formellement dans les théorèmes qui suivent, et pour lesquels on donne des idées de preuves :

Thèoréme 1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Posons, pour $y \in [a, b]$:*

$$g(y) = \int_a^y f(x) \mathrm{d}x.$$

Alors g est dérivable sur (a, b) et

$$g'(y) = f(y).$$

Démonstration. Prenons $y \in (a, b)$. On doit montrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(y+h) - g(y)}{h} = f(y).$$

En revenant à la définition de la limite on comprend qu'il faut donc, pour un nombre arbitraire $\epsilon > 0$, exhiber un nombre $\delta > 0$ qui peut dépendre de ϵ tel que pour $0 < |h| < \delta$ avec $y + h \in (a, b)$ on ait

$$\left| \frac{g(y+h) - g(y)}{h} - f(y) \right| < \epsilon.$$

On illustre notre raisonnement grace à l'image ci dessous :

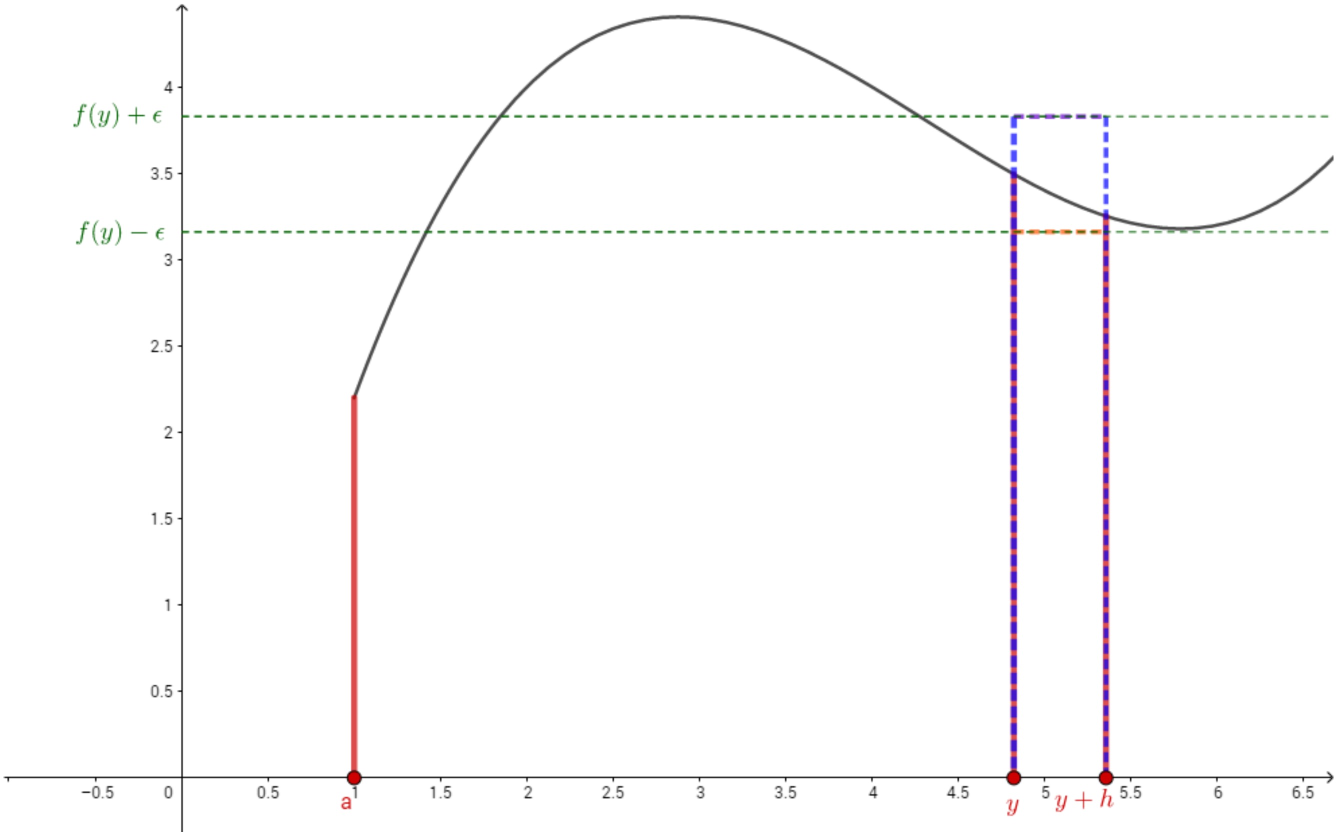

FIGURE 7 – La courbe noire est le graphe de la fonction f, et $g(y)$ est l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses, le segment rouge d'abscisse a et le segment rouge d'abscisse y.

Comme $g(y+h)$ est l'aire sous la courbe de f entre a et $y+h$, et $g(y)$ l'aire entre a et y, la différence des deux est l'aire sous la courbe de f entre y et $y+h$:

$$g(y+h)-g(y)=\int_y^{y+h} f(x)\mathrm{d}x.$$

Comme f est continue, on sait qu'il existe $\delta>0$ tel que pour $|x-y|<\delta$ on a $|f(y)-f(x)|<\epsilon$. Si $0<|h|<\delta$, alors pour tout $x\in[y,y+h]$ on a

$$f(y)-\epsilon<f(x)<f(y)+\epsilon.$$

La figure 7 illustre cette inégalité : les deux droites horizontale en pointillés verts encardent les valeurs de f comprisent entre $f(y)-\epsilon$ et $f(y)+\epsilon$. En prenant h assez petit, comme sur le dessin, on observe bien l'encadrement souhaité des valeurs $f(x)$. De cette encadrement on peut déduire un encadrement pour l'aire sous f entre y et $y+h$. Cette surface contient le rectangle formé par l'axe des abscisse entre y et $y+h$ et sous le segment en pointillés oranges horizontal d'ordonnée $f(y)-\epsilon$. L'aire sous f est donc supérieure à l'aire de ce rectangle, soit

$$(f(y)-\epsilon)\cdot h<\int_y^{y+h} f(x)\mathrm{d}x$$

. De méme, l'aire sous f entre y et $y+h$ est contenue dans le rectangle entre les pointillés bleus et les pointillés violets en haut, d'ordonnée $f(y)+\epsilon$. On obtient donc la comparaison des aires suivante :

$$\int_y^{y+h} f(x)\mathrm{d}x < (f(y)+\epsilon)\cdot h$$

donc

$$h\cdot(f(y)-\epsilon) < \int_y^{y+h} f(x)\mathrm{d}x < h\cdot(f(y)+\epsilon).$$

On peut maintenant soustraire $h\cdot(f(y))$ à cette inégalité :

$$-h\cdot\epsilon < \int_x^{x+h} f(y)\mathrm{d}y - h\cdot f(x) < h\cdot\epsilon$$

et en divisant par h on tombe sur le résultat recherché :

$$-\epsilon < \frac{g(x+h)-g(x)}{h} - f(x) < \epsilon.$$

□

On admet maintenant le théorème suivant :

Thèoréme 2. *Soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, de dérivé nulle : $f'(x) = 0$ pour tout $x \in (a,b)$. Alors f est une fonction constante.*

Nous sommes maintenant en position de démontrer le théorème clé :

Thèoréme 3 (Théorème fondamtenal de l'analyse)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur (a,b), et sa dérivé f' une fonction continue et bornée. Alors :*

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

Démonstration. On pose

$$g(x) = \int_a^x f'(y)\mathrm{d}y - f(x).$$

Par le théorème 1 la dérivée par rapport à x du premier terme est $f'(x)$. La dérivée de $f(x)$ est $f'(x)$ par définition. On trouve donc la dérivée de $g(x)$:

$$g'(x) = f'(x) - f'(x) = 0.$$

Par le théorème 2 on en déduit que g est constante, en utilisant le fait que l'intégrale de $f'(x)$ entre a et a est nulle, on trouve :

$$g(b) = \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x - f(b) = g(a) = -f(a)$$

et donc on a bien

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

□

5 Résolution du problème

Ce dernier théorème est le premier résultat que l'on voit qui nous permet de cacluler explicitement une intégrale. Il est donc naturel de chercher à l'utiliser pour calculer la différence d'énergie potentielle entre un point à une distance a de la Terre, et un point à une distance b, donnée par

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{GMm}{x^2}\mathrm{d}x.$$

On cherche donc une fonction $f(x)$ telle que

$$f'(x) = F(x).$$

Il se trouve que la fonction

$$f(x) = -\frac{GMm}{x}$$

satisfait cette condition. On arrive donc finalement à calculer la différence d'énergie recherchée :

$$\int_a^b \frac{GMm}{x^2}\mathrm{d}x = GMm\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Pour s'éloigner à une distance d de la surface de la Terre, il faut donc une énergie cinétique égale à l'énergie nécessaire pour aller d'un point à une distance R à un point à une distance $R+d$ du centre de la Terre (R est le rayon de la Terre). Cette énergie est donc égale à

$$\int_R^{R+d} \frac{GMm}{x^2}\mathrm{d}x = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right).$$

Cette énergie est une fonction croissante en d : plus l'on veut aller loin, plus il faut d'énergie. L'énergie minimale qu'il faut pour ne pas retomber doit etre plus grand que l'énergie nécessaire à aller à une distance d, pour toute valeur de d. On cherche donc la limite de cette quantité d'énergie quand d devient de plus en plus grand. On appelle cette limite la "limite en l'infini", qu'on définit rigoureusement si dessous.

Définition 6. Soit f une fonction réelle définie pour tout $x \geq a$, $a \in \mathbb{R}$, et l un nombre réel. On dit que f tend à l quand x tend à l'infini, noté

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l,$$

si $\forall \epsilon > 0$, $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \geq A$, $|f(x) - l| < \epsilon$.

On va maintenant montrer que pour b assez grand, $\frac{1}{b}$ devient arbitrairement proche de 0, c'est-à-dire que $\frac{1}{b}$ tend à 0 quand b tend à l'infini : Pour $f(x) = \frac{1}{x}$, on va donc montrer $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. En effet, soit $\epsilon > 0$, alors on pose $A = \frac{2}{\epsilon}$. Si $x \geq A$, on a alors

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{A} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

La limite de la différence d'énergie potentielle calculée plus haut quand b tend à l'infini existe donc et est notée comme suit :

$$\int_a^\infty \frac{GMm}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{GMm}{a}.$$

C'est la limite de l'énergie qu'il faut pour aller d'un point à distance a du centre de la Terre, à un point de plus en plus loin. On interprète cette limite comme l'énergie qu'il faut pour ne jamais retomber sur terre. Pour un objet à la surface de terrestre, cette énergie est

$$\frac{GMm}{R},$$

ou R est encore le rayon de la Terre. On peut alors calculer la vitesse de libération de la Terre, en applicant le principe de conservation d'énergie comme dans l'exemple 1. On veut que l'énergie cinétique d'un objet projeté à la vitesse de libération soit égal à l'énergie potentielle calculée plus haut. On cherche donc la solution v à l'équation

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R}$$

en simplifiant on a

$$v^2 = \frac{2GM}{R}$$

et donc

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Cette solution donne une valeur d'environ $11,2\ km\,s^{-1}$ pour la Terre.

6 Conclusion

Cette petite introduction à l'intégration, bien que peu rigoureuse et ne présentant pas la construction complète de l'intégrale, illustre cependant l'utilité de cette théorie, ainsi que l'intuition sur laquelle elle est fondée. Nous avons aussi brièvement regardé comment il est possible de formaliser cette intuition, et de construire des démonstration en articulant concepts, définitions et théorèmes précédemment démontrés : c'est la l'essentiel des études en mathématiques.

Le petit problème étudié montre aussi assez bien l'interdépendance qui existe entre les mathématiques et d'autres domaines de savoir, ici la physique. Les questions soulevées par les autres sciences sont souvent à la base de l'inspiration derrière les théories élaborées en mathématiques. L'étude systématique des outils ainsi dévelopés peut en retour aboutir à des résultats mathématiques qui vont souvent trouver des applications dans d'autres domaines scientifiques. La théorie de l'intégration à ainsi été approfondie et développée, en particulier par Lebesgue au début du 20ème siècle. Cette théorie est central dans l'analyse des équation différentielles, un outil majeur de la modélisation mathématique dans toutes les sciences.

7 Annexe

7.1 Convergence de la suite (S_n)

Je démontre ici que la suite (S_n) converge car c'est une suite de Cauchy. Cette partie est plutot technique et n'apparait pas à l'oral.

Comment montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ? On va utiliser le théorème suivant :

Thèoréme 4. *Soit* $(a_n)_(n \in \mathbb{N})$ *une suite réelle de Cauchy, alors elle converge.*

Une suite de Cauchy est une suite dont les termes sont arbitrairement proches à partir d'un certain rang.

Définition 7. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si $\forall\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad m \geq N, \quad |a_n - a_m| < \epsilon.$$

On va maintenant montrer que S_n est une suite de Cauchy. On peut écrire S_n avec la notation d'une somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} F(a + k\frac{b-a}{n}) \cdot \frac{b-a}{n}.$$

On peut voir S_n comme l'air sous la fonction f_n définie comme suit : avec $h_n = \frac{b-a}{n}$ et pour $x \in [a, b)$ il existe un unique entier k satisfaisant $0 \leq k \leq n-1$ tel que

$$x \in [a + kh_n, a + (k+1)h_n).$$

On définit alors

$$f_n(x) = F(a + h_n \cdot k).$$

Ces fonctions f_n sont la généralisation à tout entier n des fonctions représentées en traits épais rouges et verts dans la figue 4 pour $n = 3$ et $n = 12$ respectivement. On va maintenant trouver une borne à la différence $|S_n - S_m|$. Pour simplifier l'écriture, on va donner un nom à tous les points aux extrémités des intervals utilisés pour définir f_n et f_m, c'est-à-dire tous les points de la forme : $a + kh_n$ et $a + k'h_m$ pour des entiers k et k' tels que $0 \leq k < n$ et $0 \leq k' < m$. On ordonne ces points de manière croissante pour former une liste de s points que l'on notes :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{s-1} < x_s = b.$$

C'est un redécoupage de l'interval $[a, b]$ compatible avec f_n f_m au sens que ces fonctions sont constantes sur tous les intervals $[x_i, x_{i+1}]$. On peut donc réécrire les aires de nos rectangles comme la somme de plus petits rectangles :

$$f_n(a+k\cdot h_n)\cdot h_n = \sum_{x_i\in[a+k\cdot h_n, a+(k+1)\cdot h_n)} f_n(a+k\cdot h_n)\cdot(x_{i+1}-x_i) = \sum_{x_i\in[a+k\cdot h_n, a+(k+1)\cdot h_n)} f_n(x_i)\cdot(x_{i+1}-x_i).$$

On a donc

$$S_n = \sum_{i=0}^{s-1} f_n(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

et

$$S_m = \sum_{i=0}^{s-1} f_m(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
|S_n - S_m| &= \left|\sum_{i=0}^{s-1} f_n(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{s-1} f_m(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{s-1} (f_n(x_i) - f_m(x_i)) \cdot (x_{i+1} - x_i)\right| \\
&= \sum_{i=0}^{s-1} |f_n(x_i) - f_m(x_i)| \cdot (x_{i+1} - x_i)
\end{aligned}$$

On peut supposer sans perte de généralité que $n < m$. Dans ce cas si $x_i \in [a + kh_n, a + (k+1)h_n)$ de sorte que $f_n(x_i) = F(a + kh_n)$ on a

$$F(a + (k+1)h_n) \leq f_m(x_i) \leq F(a + (k-1)h_n).$$

Donc

$$\begin{aligned}
|f_n(x_i) - f_m(x_i)| &\leq \max_{0 \leq k < n} \left(F(a + kh_n) - F(a + (k+1)h_n)\right) \\
&= F(a) - F(a + h_n) \\
&= GMm \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a + h_n)^2} \right) = GMm \frac{2ah_n + h_n^2}{a^2 (a + h_n)^2} \\
&< GMm \frac{3h_n^2}{a^4}.
\end{aligned}$$

Pour $\epsilon > 0$, en prenant

$$n, m > \sqrt{\frac{3GMm(b-a)^3}{\epsilon \cdot a^4}}$$

On a

$$|f_n(x_i) - f_m(x_i)| < GMm \frac{3h_n^2}{a^4} < \frac{\epsilon}{b-a}$$

et donc

$$\begin{aligned}
|S_n - S_m| &= \sum_{i=0}^{s-1} |f_n(x_i) - f_m(x_i)| \cdot (x_{i+1} - x_i) \\
&< \sum_{i=0}^{s-1} \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (x_{i+1} - x_i) \\
&= \frac{\epsilon}{b-a} \cdot \sum_{i=0}^{s-1} \cdot (x_{i+1} - x_i) \\
&= \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (x_s - x_0) = \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \epsilon.
\end{aligned}$$

Donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une suite de Cauchy.