A prendre ou à laisser ?

Jules Candau-Tilh

6 novembre 2017

Maths

Pour Tous

Séminaire "Maths Pour Tous"

Brad Pitt jouant à *A prendre ou à laisser*

Table des matières

Introduction

Les jeux de hasard sont au cœur de ce qui nous divertit : à quoi ressembleraient les dimanches après-midi entre amis sans bridge, sans tarot, ou sans poker ? Qui peut oublier les ascenseurs émotionnels que provoquait en nous Arthur sur TF1 quand il ouvrait les fameuses boîtes du jeu *A prendre ou à laisser* ? Mais au-delà de l'émotion, nous pouvons nous interroger : Qu'est-ce qui nous fascine tant dans le hasard ?

Un premier élément de réponse pourrait être l'aléatoire ; aucune partie de tarot, de bridge, etc. à laquelle nous jouons n'est strictement identique à la précédente. Notre attention est donc maintenue en permanence, parce que tout peut arriver. Pour autant, jouer à la bataille fermée pendant des heures n'intéresse personne : une fois que les cartes sont distribuées, aucun des joueurs ne peut modifier ses chances de victoires, quel ennui ! Au hasard, il faut donc adjoindre un autre concept, qui est la prise de décision. Que faire pour maximiser la probabilité de gagner ? C'est de là que vient le plaisir qu'on a à commenter une partie de poker, à se demander quelle était la meilleure chose à faire à un instant donné, bref, à optimiser sa manière de jouer.

Historiquement, c'est pour déterminer les stratégies gagnantes des jeux de hasard que Pierre de Fermat et Blaise Pascal ont au XVI$^{\text{ème}}$ siècle jeté les bases d'une théorie du calcul des probabilités. Depuis lors, les probabilités ont continué d'intriguer les mathématiciens, et fournissent aujourd'hui encore des domaines de recherche extrêmement féconds, comme la théorie des jeux pour n'en citer qu'un seul. En s'inspirant des illustres esprits qui nous ont précédé, nous allons partir de l'étude du jeu télévisé *A prendre ou à laisser* et des questions qui nous viennent naturellement afin d'expliquer la pertinence du cadre moderne des probabilités et de comprendre comment gagner de l'argent en masse.

Première partie
Le cadre moderne des probabilités

1 Attention : Un jeu télévisé peut en cacher un autre !

Echanger ou ne pas échanger, telle est la question

Si vous avez regardé la télévision à un moment dans votre vie entre 2004 et 2006 ou entre 2009 et 2010, vous avez pu tomber sur la fin d'une partie d'*A prendre ou à laisser* : le candidat a la boîte 1, il reste deux autres boîtes, la 2 et la 3. Alors que les trois dernières sommes en jeu sont 1€, 10 000€ et 500 000€, le candidat reçoit un appel du banquier, qui lui propose d'échanger sa boîte avec celle qui restera quand le candidat en aura ouverte une. Que devrait-il faire ? *Faire voter le public.*

Étant donné qu'il n'a aucune information sur ce qu'il y a dans les trois boîtes, pour le candidat, il y a une chance sur trois que les 500000€tant convoités soient dans la boîte 1, une chance sur trois qu'ils soient dans la boîte 2, et une chance sur trois qu'ils soient dans la boîte 3. On a d'ailleurs les mêmes probabilités pour les deux autres sommes.

Commençons maintenant à introduire le vocabulaire des probabilités. Notons A_1 le cas où les 500 000€ sont dans la boîte 1. A_1 est un évènement qui a une chance sur trois de se produire. On écrit donc $p(A_1) = \frac{1}{3}$, ce qui se lit "la probabilité que l'évènement A_1 se produise est d'un tiers".

Imaginons maintenant que le candidat ouvre la boîte 3, et qu'elle contient la somme de 1€. La situation a donc changé : maintenant, les 500 000€ sont soit dans la boîte 1 soit dans la 2. Pour autant, pour le candidat, aucune des deux boîtes n'est avantagée par rapport à l'autre. Les 500 000€ ont donc une chance sur deux d'être dans la boîte 1, et une chance sur deux d'être dans la boîte 2. Par contre, comme la situation a changé, on ne peut plus continuer à appeler A_1 l'évènement "les 500 000€ sont dans la boîte 1. On appelle donc A'_1 l'évènement " les 500 000€ sont dans la boîte 1, sachant que la boîte 3 est ouverte et contenait 1€". D'après ce qui précède, on a donc $p(A'_1) = \frac{1}{2}$. Mais par symétrie des rôles des boîtes 1 et 2, si on note A'_2 l'évènement " les

500 000€ sont dans la boîte 2, sachant que la boîte 3 est ouverte et contenait 1€", on a $p(A'_2) = \frac{1}{2}$.

Que faut-il en conclure ? Vu que la probabilité que le pactole soit dans la boîte 1 est la même que celle qu'il soit dans la boîte 2, en fait, le candidat ne perd rien à changer ou à garder sa boîte : il ne peut pas avoir une meilleure probabilité de gagner les 500 000€ que $\frac{1}{2}$, quelle que soit la boîte qu'il garde à la fin. Il n'y a donc pas de stratégie gagnante !

Généralisons : si le candidat ouvre la boîte 3 et qu'elle révèle les 500 000€ , le candidat voudra désormais gagner les 10 000€ . Mais, par le même raisonnement que précédemment, les 10000€ ont autant de chance de se trouver dans la boîte 1 que dans la boîte 2. Encore une fois, le candidat pourra donc choisir de garder ou de changer sa boîte sans influer sur ses chances de gagner la somme maximale possible. On raisonne de même si la boîte 3 révèle les 10 000€ .

Enfin, précisons qu'on peut faire les mêmes raisonnements pour arriver aux mêmes conclusions si jamais le candidat décide d'ouvrir la boîte 2. Donc dans tous les cas, le candidat peut choisir d'échanger ou non sa boîte sans que cela ne change rien à ses chances de victoire.

Des Ferraris et des chèvres

Mais peut-on imaginer un jeu simple où le candidat malin peut influer sur ses chances de victoire ? Figurez-vous qu'on y a déjà réfléchi avant nous, et que cela a donné le jeu *Deal or No Deal* aux Etats-Unis, qui a été appelé en France *Le jeu des 3 Portes*, ou encore *Des ferraris et des chèvres*.

La situation est la suivante : un candidat se trouve face à trois portes, numérotées de 1 à 3, derrière lesquelles se trouvent une Ferrari et deux chèvres. Il choisit une porte, en espérant qu'elle cache la Ferrari. Le présentateur, qui sait où est la Ferrari, révèle une porte où elle n'est pas, et qui n'est pas la porte choisie par le candidat, disons la 3. Il demande ensuite au candidat s'il veut changer de porte ou non. Que devrait-il faire ? *Faire voter le public.*

Nous allons montrer que, contrairement à la situation précédente, le candidat a intérêt à changer de porte. Cette stratégie gagnante porte le nom de *Paradoxe de Monty Hall*. Pour le montrer, nous allons compter, parmi tous les issues possibles, le nombre d'issues favorables au candidat : ce nombre n'est pas le même selon que le candidat garde sa porte ou la change.

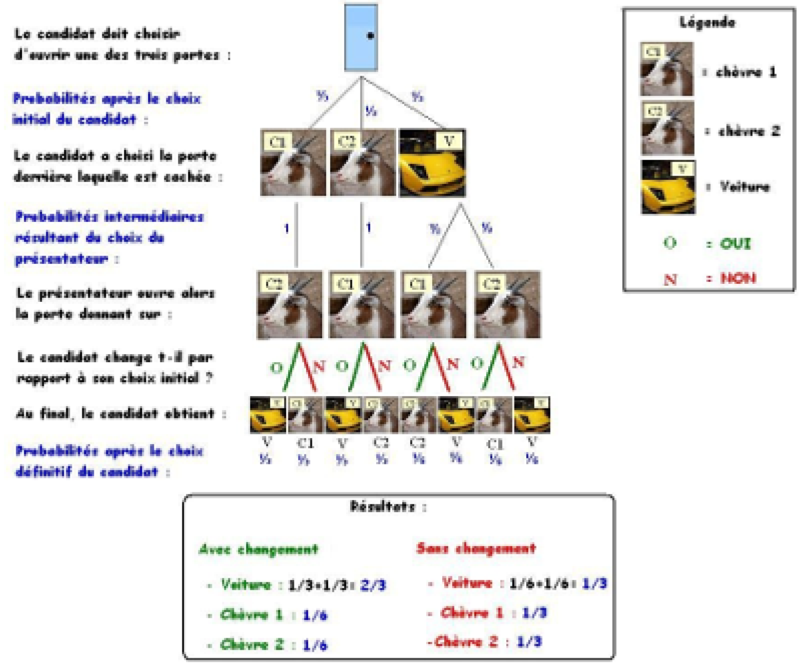
Le candidat choisit une porte. Dans deux cas sur trois il choisit une chèvre, dans un cas sur trois il choisit la Ferrari.

S'il choisit une chèvre, le présentateur est forcé de révèlera la porte contenant la dernière chèvre.

S'il choisit la Ferrari, le présentateur révèlera au hasard une des deux portes restantes contenant une chèvre.

Considérons le candidat qui garde quoi qu'il arrive sa porte. Alors dans deux cas sur trois, il finira avec une chèvre. Et dans un cas sur trois, s'il a choisi dès le début une Ferrari, alors il finira avec une Ferrari, puisqu'il ne change pas d'avis.

Considérons maintenant le candidat qui change systématiquement de porte. S'il choisit une chèvre, alors quand il change de porte, il aura sa Ferrari. Donc dans deux cas sur trois, il a sa Ferrari. Et s'il choisit la Ferrari au début, dans un cas sur trois, alors il repartira avec une chèvre



Aucune chèvre n'a été blessée pendant la levée de ce paradoxe

quelle que soit la porte révélée. Donc ce candidat-là a bien deux chances sur trois d'obtenir une Ferrari !

Dans ce jeu, qui ne semble pas si éloigné d'*A prendre ou à laisser*, il y a donc bien une stratégie gagnante. En fait, la différence provient du présentateur : dans *A prendre ou à laisser*, c'est le candidat qui choisit laquelle des deux boîtes il va ouvrir, et ce, totalement au hasard. Dans *Le jeu des 3 Portes*, c'est le présentateur, qui a des informations supplémentaires sur l'état du jeu, qui choisit à la place du candidat laquelle des deux portes ouvrir, et il ne le fait pas au hasard, car il n'ouvrira jamais la porte où il y a une Ferrari, si le candidat ne l'a pas déjà choisie.

Finalement, nous comprenons que pour raisonner correctement en théorie des probabilités, il faut définir très précisément les issues que l'on considère comme possibles, et celles qui sont impossibles. Et, au vu du comportement plutôt louche du présentateur du *jeu des 3 Portes*, il faut également tenir compte du fait que certains évènements sont conditionnés à d'autres évènements. Par exemple, dans *Le jeu des 3 Portes* la porte ouverte par le présentateur dépend toujours de la porte choisie par le candidat. Cela motive les définitions que nous donnons dans la partie suivante.

2 Les probabilités : une définition pas du tout aléatoire...

Probabilité, oui, mais de quoi ?

Maintenant, il nous faut donc bien définir de quoi on va parler. Premièrement, pourquoi utilise-t-on des probabilités ? Parce que, dans une partie d'*A prendre ou à laisser*, on ne connaît pas à l'avance ce qu'il y a dans les boîtes. Ici, notre expérience aléatoire sera donc une partie *A prendre ou à laisser*.

Définition 1. *Expérience aléatoire*

Une expérience dont on ne connaît pas à l'avance le résultat. Si l'on peut en prédire le résultat à l'avance (exemple : un chat en chute libre retombe *toujours* sur ses pattes), on parle d'expérience déterministe.

Ensuite, quels sont les évènements d'une partie d'*A prendre ou à laisser* que l'on va considérer ?

Définition 2. *Univers et évènement*

En probabilité, l'univers est l'ensemble des issues (résultats) possibles d'une expérience aléatoire. On le note Ω. On appelle évènement, et on note w, toute partie de l'univers. Si l'univers contient un nombre fini (resp. dénombrable) d'éléments, on dit qu'il est fini (resp. dénombrable). Sinon, l'univers est dit infini, et les choses se compliquent.

Rappelons-nous que l'objectif est de comprendre comment gagner de l'argent en masse. Pour construire notre univers, on considèrera donc les évènements du types " *La boîte* n *contient la somme de* x €", ou " *La boîte du candidat contient une somme supérieure à* 1 €". L'évènement "*Le candidat fond en larmes pendant la partie*" est donc exclu de l'univers, malheureusement. Par contre, dans notre exposé, l'univers considéré est fini, ce qui simplifie la situation, comme nous allons le voir plus loin.

Mais même si l'univers est fini, on peut y trouver beaucoup d'évènements. Pour pouvoir simplifier les calculs, on aimerait bien définir une famille plus réduite d'évènements, dont la connaissance de la réalisation ou de la non-réalisation nous permettrait de savoir tout ce qu'il y a à savoir sur l'issue de l'expérience aléatoire.

Définition 3. *Évènement élémentaire*

Un évènement élémentaire est un évènement constitué d'un seul élément de l'univers. Dans un univers fini, tout évènement peut s'écrire comme réunion d'évènements élémentaires.

Dans notre cas, les évènements élémentaires sont les évènements " *La boîte* n *contient la somme de* x €", où n parcourt l'ensemble des boîtes (typiquement une dizaine de boîtes pour simplifier), et x l'ensemble des gains possibles (autant que de boîtes donc !). Et l'évènement " *Une des boîtes contient la somme de* 1 € est la réunion des évènements "*la boîte* n *contient la somme de* 1 € " pour n variant de 1 au nombre total de boîtes.

Enfin, il est possible que deux évènements ne puissent pas se produire à l'issue d'une même expérience (pas "en même temps"). On dit alors qu'ils sont *incompatibles*. Par exemple $A =$" *Le candidat gagne* 1 € " et $B =$" *Le candidat gagne* 10 € " sont incompatibles.

Et les probabilités entrent dans la danse

Les évènements que nous allons étudier sont désormais bien délimités. On peut donc leur associer une probabilité. Concrètement, une probabilité est un nombre qui décrit le degré de certitude qu'on associe à la réalisation d'un évènement donné. Formellement, on a :

Définition 4. *Probabilité*

Une probabilité est une application qui à un évènement w de Ω associe un réel, noté $p(w)$, tel que :

— Pour tout w dans Ω, $0 \leq p(w) \leq 1$;
— $p(\Omega) = 1$;
— Si A et B sont deux évènements incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

La première propriété traduit simplement l'intuition qu'une probabilité est de la forme "une chance sur deux, trois, etc" pour des cas basiques., et donc toujours inférieure ou égale à 1.

La deuxième propriété nous dit que la chose dont on peut être sûr, c'est qu'un évènement va se produire à l'issue de l'expérience. En effet, un évènement de probabilité 1 arrive forcément (par exemple "*La somme de* 1 € *est dans une boîtes*"), et un évènement de probabilité nulle n'a aucune chance de se produire (comme "*deux boîtes contiennent la même somme*").

Enfin, la troisième propriété, fondamentale, fait en sorte que le découpage d'évènements en plus petits évènements marche bien quand on passe à la probabilité des-dits évènements. Par exemple, considérons une partie d'*A prendre ou à laisser* avec trois boîtes et les trois sommes 1 €, 5 € et 10 €. Il y a une chance sur trois que le gain 1 € soit dans la boite 1, et une chance sur trois qu'il soit dans la boîte 2. Grâce à la troisième propriété, on sait donc qu'il y a deux chance sur trois que le gain soit dans la boîte 2 OU 3. En somme, la propriété traduit une intuition venue de la réalité.

Remarque 5. Souvent, et cet exposé n'y échappe pas, on présente les théories mathématiques une fois qu'elles sont totalement achevées et bien construites. Elles se comprennent alors facilement, mais l'on peut en venir à oublier que toutes ces théories ne se développent rarement d'une seule traite. Comme les autres domaines des mathématiques, les probabilités ont été longuement étudiées, parfois mal comprises, avant d'être pleinement comprises. L'on peut imaginer que la troisième propriété, qui semble si intuitive aujourd'hui, n'a pas été incluse dès le début dans la théorie des probabilités. Les mathématiciens avaient donc une théorie moins efficace, jusqu'à ce qu'ils se rendent comptent qu'elle marcherait beaucoup mieux en imposant cette propriété dans la définition d'une probabilité. C'est pourquoi elle apparaît maintenant. De tels exemples sont légions...

3 Vous avez dit modèle ?

D'un univers fini...

Maintenant qu'on a un univers et qu'on sait ce qu'est qu'une probabilité, on va presque pouvoir jouer à *A prendre ou à laisser*. Mais que pourrait-il bien manquer ? En fait, la définition de probabilité donnée plus haut est très générale, ce qui fait qu'on a le choix entre beaucoup de probabilités différentes à appliquer à notre univers.

On pourrait par exemple prendre la probabilité suivante : on prend dix boîtes et les sommes 1 €, 2 €, ..., 10 €. On pose alors p la probabilité telle que $p($*la somme* n € *est dans la boite* n $) = 1$, où n varie de 1 à 10. Très concrètement, on a transformé l'expérience aléatoire en une expérience déterministe : avant même d'ouvrir les boîtes, on sait que dans la boîte 1 se trouve 1 €, dans la boîte 2 il y a 2 €., etc.

Légalement, on n'a rien fait de mal : la probabilité vérifie les trois propriétés de la définition. Par contre, d'un point de vue de la modélisation de l'expérience aléatoire, c'est-à-dire une partie *A prendre ou à laisser*, on est très mauvais. Notre loi de probabilité dit que quelle que soit la partie d'*A prendre ou à laisser* que l'on joue, il y aura toujours les mêmes sommes dans les mêmes boîtes. Ce n'est manifestement pas la réalité.

Pour trouver un modèle pertinent, il faut donc prendre en compte l'expérience réelle, et choisir un modèle en fonction de celle-ci. Dans *A prendre ou à laisser*, on peut supposer que vraisemblablement, aucune boîte n'est différente d'une autre. Chaque somme a donc la même chance d'être dans une boîte plutôt qu'une autre. Le modèle que l'on va choisir sera donc celui de la *probabilité* *uniforme*. Pour déterminer la probabilité d'un évènement, on fait le rapport du nombre d'issues favorables à l'évènement sur le nombre d'issues totales. Si A est un évènement, on a donc la formule :

$$p(A) = \frac{\text{Nombre d'issues de l'expérience où A est réalisé}}{\text{Nombre d'issues totales de l'expérience}}$$

Prenons un cas simple. On considère une partie d'*A prendre ou à laisser* avec trois boîtes et trois sommes : 1, 2 et 3 €. On veut calculer la probabilité de l'évènement A="*La somme* 1 € *est dans la boîte 1*". On voit assez rapidement qu'il y a deux configurations qui permettent à A d'être réalisé :

— La somme 1 € est dans la boîte 1, les 2 € sont dans la 2, les 3 € dans la 3.
— La somme 1 € est dans la boîte 1, les 3 € sont dans la 2, les 3 € dans la 3.

Quel est le nombre de configurations total ? On peut représenter cela avec un arbre des configurations possibles. On dénombre d'abord le nombre de configurations possibles pour la première boîte, puis pour les autres.

- La somme 1 €est dans la boîte 1 et :
  - La somme 2 € est dans la boite 2 et les 3 € dans la boîte 3 OU
  - La somme 3 € est dans la boite 2 et les 3 € dans la boîte 2.
- OU ALORS ce sont les 2 € qui sont dans la boite 1 et :
  - La somme 1 € est dans la boite 2 et les 3 € dans la boîte 3 OU
  - La somme 3 € est dans la boite 2 et les 1 € dans la boîte 3.
- OU ENFIN ce sont les 3 € qui sont dans la boîte 1 et :
  - La somme 2 € est dans la boite 2 et les 1 € dans la boîte 3 OU
  - La somme 1 € est dans la boite 2 et les 2 € dans la boîte 3.

Finalement, on a bien 6 configurations possibles, ce qui signifie que l'univers Ω contient dans ce cas 6 éléments élémentaires, qu'on vient de dénombrer. Donc la probabilité de l'évènement A est $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; conformément à notre intuition de base "il y a une chance sur trois (le nombre de boîtes) qu'il y ait 1 € dans la première boîte". Notre modèle semble donc plutôt adapté ! Par pure curiosité mathématique, nous allons maintenant essayer de le pousser dans ses derniers retranchements.

Vers l'infini et l'au-delà

Imaginons maintenant que les boîtes ne contiennent plus d'argent. On ne s'intéresse au numéro qu'elles portent, et on en choisit une seule au hasard, en conservant le modèle de la probabilité uniforme. L'expérience aléatoire est donc cette fois-ci le tirage d'une boîte.

Sans argent dans les boîtes, l'univers Ω se simplifie : les évènements élémentaires de l'univers sont juste les différentes boîtes. Le nombre de configurations de Ω est donc le nombre total de boîtes.

Considérons maintenant l'évènement $A =$" *la boîte* 1 *est choisie*". On a donc, comme on choisit strictement au hasard, une chance sur le nombre de boîtes que A se réalise.

S'il y a 10 boîtes au total, on aura que $p(A) = \frac{1}{10} = 0.1$.

S'il y a 100 boîtes au total, on aura que $p(A) = \frac{1}{100} = 0.01$.

S'il y a 1000 boîtes au total, on aura que $p(A) = \dfrac{1}{1000} = 0.001$.

Maintenant, soyons fous, imaginons que $TF1$ veuille faire une émission exceptionnelle d'*A prendre ou à lais* avec une infinité de boîtes. Par exemple, on considère l'intervalle $[0;1]$, où à chaque point de l'intervalle, on associe une boîte.

On a donc la boîte 0, la boîte 0.01241, la boîte 0.93270, et une infinité d'autres. Quelle est donc la probabilité que la boîte 1 soit choisie ? D'après le petit jeu précédent où l'on prenait 10, puis 100, puis 1000 boîtes, on aura envie d'écrire :

$$p(A) = \frac{1}{\infty} = 0$$

Et aussi choquant que cela puisse paraître, c'est bien le cas ! Prouvons-le en raisonnant par l'absurde. Supposons que $p(A)$ est non-nulle et égale à un réel plus petit que 1, par exemple $\dfrac{1}{N}$, avec N un entier naturel plus grand que 2.. Cependant, nous avons gardé notre modèle de probabilité *uniforme*. Alors, si la probabilité de choisir 1 est $\dfrac{1}{N}$, c'est que la probabilité de choisir n'importe quel autre réel entre 0 et 1 est aussi de $\dfrac{1}{N}$!

Considérons maintenant l'évènement $B =$"*On choisit l'une des* N+1 *boîtes suivantes :* $0.1, 0.01, 0.001, ..., 0.0$ *avec* N *zéros après la virgule pour la dernière*". On voit que B est la réunion des $N+1$ évènements suivants :

— A_1="La boîte 0.1 est choisie" ;
— A_2"La boîte 0.01 est choisie" ;
— A_3"La boîte 0.01 est choisie" ;
— ...
— A_{N+1}"La boîte 0.00000...00001 est choisie".

Comme l'expérience aléatoire est le tirage d'une seule boîte, ces évènements ne peuvent pas avoir lieu au cours de la même expérience. Ils sont donc incompatibles.

Enfin, tous ces évènements ont la même probabilité $\dfrac{1}{N}$. On peut donc appliquer la troisième propriété pour calculer la probabilité de l'évènement B :

$$p(B) = p(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_N) = p(A_1) + p(A_2) + ... + p(A_{N+1}) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + ... + \frac{1}{N}$$

$$p(B) = \frac{N+1}{N} = 1 + \frac{1}{N} > 1$$

En considérant l'évènement B, on voit donc que p ne vérifie pas la première propriété d'une probabilité. On a donc une absurdité.

Mais alors, la probabilité de choisir la boîte 1 est nulle. Par uniformité de la probabilité, la probabilité de choisir n'importe quelle boîte est donc nulle ! Cela peut paraître très paradoxal, et c'est un peu contre-intuitif, mais cela dépend de la manière d'envisager les choses.

En fait, en probabilités, il faut souvent se garder de faire des raisonnements a posteriori, c'est-à-dire une fois connu le résultat de l'expérience. Ici, si l'on choisit une boîte, et qu'elle s'avère être 0.5, on va se dire "mais je l'ai bien tirée, cette boîte 0.5, comment sa probabilité peut-elle être nulle ?". En réalité, si on raisonne a priori, quand on choisit une boîte, il y a tellement de boîtes que tomber sur l'une d'entre elles en particulier est extrêment improbable. Ce serait comme gagner au loto dans un loto on l'on vous demande d'avoir une infinité de chiffres bons...

Finalement, il faut modifier la définition d'un évènement de probabilité nulle. Ce n'est pas qu'il ne peut pas arriver, mais qu'il n'arrive *presque sûrement* jamais : ce n'est pas pour autant qu'il ne se produira jamais. On dit plutôt qu'il est négligeable devant des évènements de probabilités non nulles.

Cela dit, un problème demeure. Si l'on veut des évènements de probabilité non nulle, lesquels faut-il considérer ? Raisonnons : si un point tout seul ne peut pas avoir de probabilité non nulle, peut-être que cela pourrait être le cas pour un ensemble infini de points ? Cela a poussé les mathématiciens à définir la probabilité uniforme sur l'intervalle $[0;1]$ en raisonnant sur des sous-intervalles.

Concrètement, on n'étudie plus des évènements du type "*La boîte* 0.1 *est tirée*" mais plutôt sur ceux du type "*Une boîte entre* 0.1 *et* 0.2 est tirée". La formule donnant la probabilité de l'évènement $A =$" *tirer une boîte appartenant au sous-intervalle* $[a;b], 0 \leq a < b \leq 1$" est alors :

$$p(A) = \frac{\text{Longueur de [a ; b]}}{\text{Longueur de } [0;1]} = \frac{b-a}{1} = b-a$$

Deuxième partie
Qui veut gagner de l'argent en masse ?

4 Du modèle à la stratégie

Grâce à nos précédentes constructions, nous avons déterminé les situations d'*A prendre ou à laisser* que l'on prenait dans notre modèle uniforme, et nous savons calculer leur probabilité. Comment, maintenant, maximiser ses chances de gagner de l'argent ? Précisons un postulat important : comme l'expérience est aléatoire, on ne pourra jamais donner une méthode permettant de gagner à coup sûr les 500000 € à chaque partie. On ne peut donner qu'une démarche maximisant la probabilité de gagner le plus d'argent possible.

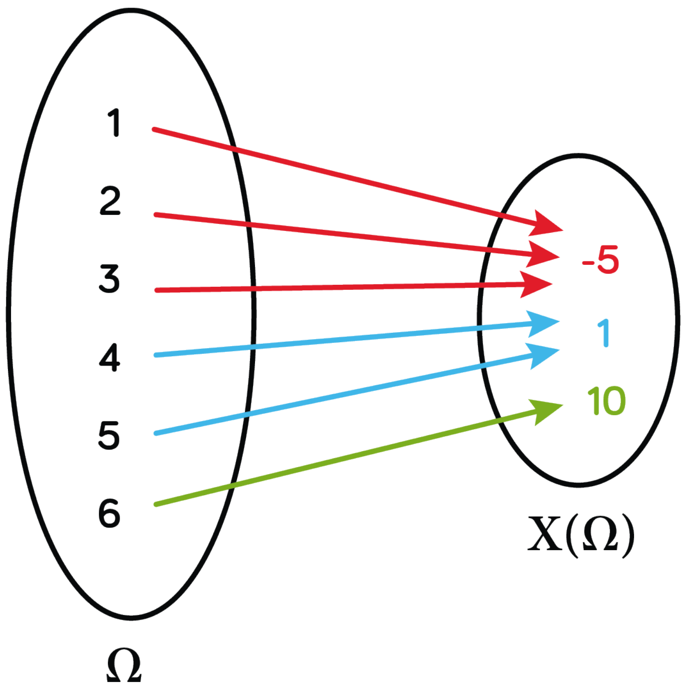
Une approche possible serait d'observer un très grand nombre de parties, et de s'intéresser au gain moyen des candidats selon leur comportement (ne vend jamais sa boîte, la vend à la première proposition du banquier, à la deuxième, etc.). La meilleure stratégie sera alors celle qui est associée au gain moyen le plus grand. C'est une manière valable de procéder, mais qui relève du domaine des *statistiques* : on cherche à décrire le comportement d'une expérience à partir d'un échantillonnage d'issues. En probabilité, on essaie plutôt de prédire la loi régissant l'expérience à partir d'une modélisation.

D'un point de vue stratégique, rappelons que dans *A prendre ou à laisser*, il y a deux manières de terminer la partie : soit le candidat ouvre toutes les boîtes jusqu'à ce qu'il ne reste que la sienne, soit il accepte une proposition de rachat de sa boîte par le banquier. La question est donc de savoir s'il faut vendre, et à quel moment. Très concrètement„ imaginons que le banquier propose une somme donnée d'argent pour la boîte du candidat. Si à ce moment là de la partie, le gain le plus probable du candidat est supérieur à la somme proposée, alors le candidat doit refuser l'offre.

Sinon, il doit l'accepter.

Nous voulons donc être capable de calculer, à chaque instant de la partie, ce gain le plus probable, appelé gain moyen. Pour cela, nous allons définir une fonction X, qui, à l'expérience aléatoire que constitue la partie d'*A prendre ou à laisser*, associe la somme d'argent qui est dans la boîte du candidat. Mais, comme rappelé plus haut, on ne connaît pas à l'avance le résultat d'une partie d'*A prendre ou à laisser*. Comment, alors, peut-on définir une fonction qui donne l'argent contenu dans la boîte du candidat ?

En fait, on ne connaît pas non plus à l'avance la valeur de X. Si vous voulez, on définit une fonction un peu mystérieuse, appelée *variable aléatoire*, qui peut changer d'une expérience à une autre. Et comme on ne peut pas prédire de manière sûre ce qu'elle vaudra, on s'intéressera juste aux probabilités qu'elle a de prendre des valeurs données.



Variable aléatoire associant au résultat d'un lancer de dé un nombre entier

Etant donné que nous souhaitons connaître le gain moyen du candidat à chaque instant de la partie (i.e. quand il reste 20, 15, 10, 2 boîtes), pour faciliter les raisonnements qui suivront, nous allons décomposer la partie d'*A prendre ou à laisser*. Soit N le nombre de boîtes qu'il y a au début de la partie. A chaque tour, le candidat élimine une boîte. Découpons l'expérience aléatoire que constitue la partie en N expériences aléatoires, qui correspondent au N tours du jeu. S'il y a moins de N tours parce que le candidat vend sa boîte, on fera comme s'il continuait à jouer, cela ne change rien au calcul du gain moyen à un tour donné.

A celle N nouvelles expériences aléatoires, nous associons naturellement les N univers Ω_n suivants : Ω_n correspond à l'ensemble des configurations possibles des sommes restantes dans les boites restantes, quand il n'y a plus que n boîtes. On peut alors définir la variable aléatoire X_n donnant l'argent se trouvant dans la boîte du candidat :

Définition 6. X_n est une variable aléatoire qui va de Ω_n dans $\mathbb{R}$. Elle prend un évènement dans Ω_n, noté w_n. Par définition de Ω_n, on sait que w_n donne une configuration possible des sommes d'argent dans la boîte. Connaissant cette configuration, $X_n(w)$ aura donc la valeur de l'argent qui est dans la boîte du candidat. Pour alléger les notations, on notera désormais les sommes sans unités, au lieu de les mettre en euro.

Par exemple, si l'on est dans Ω_3, il ne reste que trois boîtes, qu'on note 1, la boîte du candidat, 2 et 3. On a trois sommes, 1, 2 et 3 €. Si l'on considère l'évènement w_3 = "*La somme* 1 € *est dans la boîte* 1*, les* 2 € *sont dans la* 2*, les* 3 € *dans la* 3, alors on aura que : $X_3(w_3) = 1$. Ici, X_3 a une valeur non aléatoire. Cela vient du fait que l'on s'est arbitrairement données un évènement w_3 précis : en probabilités, ce n'est jamais le cas, puisqu'on ne connaît pas à l'avance l'issue de l'expérience aléatoire. On ne peut que prédire ce qu'il se passera.

Une démarche plus commune en probabilité sera plutôt de se demander "quelle est la probabilité que X_3 vaille 1 ?". Pour la trouver, il nous faut juste calculer la probabilité de tous les évènements qui feront que X_3 vaut 1 ; i.e que le candidat ait 1 € dans sa boîte. Mais cela, on sait le faire, et on l'a même déjà fait dans la première partie ! On avait trouvé une probabilité de $\frac{1}{3}$. On écrira donc :

$$p(X_3 = 1) = \frac{1}{3}$$

.

5 L'espérance, ou l'espoir de gagner

Nous y sommes presque : maintenant que nous connaissons la variable aléatoire qui donne ce que va gagner le candidat, il ne nous reste plus qu'à calculer la valeur moyenne de cette variable aléatoire. Selon que cette moyenne est plus élevée ou moins élevée que la proposition du banquier, le candidat pourra alors se décider.

Mais un des grands avantages des variables aléatoires est qu'il est très facile de leur associer une valeur moyenne. On appelle cette valeur moyenne *espérance*. Elle n'est d'ailleurs pas si éloignée de la notion intuitive de valeur moyenne. Par exemple, si j'ai eu trois notes à mon premier semestre de $L1$, disons 13, 15 et 16, alors pour calculer ma moyenne je fais :

$$\mu = \frac{13 + 15 + 16}{3} = 14.666666...$$

.

Si mes notes ont des coefficients différents, par exemple mon 13 est coefficient 2 , mon 15 est coefficient 1 et mon 16 et coefficient 3, alors c'est comme si j'avais eu 6 contrôles, avec 2 où j'ai 13 contrôles, 01 où j'ai eu 15, et 3 ou j'ai eu 6. Ma moyenne vaut alors :

$$\mu = \frac{13 * 2 + 15 * 1 + 16 * 3}{6} = 14.833333...$$

.

Mais on remarque que ma moyenne pourrait aussi s'écrire

$$\mu = \frac{1}{3} * 13 + \frac{1}{6} * 15 + \frac{1}{2} * 16.$$

Intuitivement, on pourrait se dire que tout se passe comme si j'avais eu 1 seul gros contrôle, et que $\frac{1}{3}$ de mon devoir avait eu la note de 13, $\frac{1}{6}$ avait été noté 15, et $\frac{1}{2}$ avait été noté 16.

Et ce qui est notable, c'est que $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=1$, comme si ces nombres étaient des probabilités.

Cela nous amène à réfléchir à la situation suivante : imaginions que nous soyons dans une partie d'*A prendre ou à laisser* avec 6 boîtes, deux contenant 13 € , une contenant 15 € , et trois contenant 16 €. La somme moyenne contenue dans ces boîtes est donc aussi de

$$\mu = \frac{13 * 2 + 15 * 1 + 16 * 3}{6} = 14.833333...$$

.

Si l'on veut calculer le gain moyen du candidat, et que l'on pondère ses trois gains possibles par la probabilité que ces gains ont d'être dans sa boîte, on obtient exactement la même formule. On voit donc qu'il semble y avoir un lien clair entre la somme moyenne contenue dans les boîtes et le gain moyen du candidat tel qu'on l'a calculé juste avant.

C'est en fait ce lien qui a aidé les mathématiciens à définir rigoureusement la valeur moyenne d'une variable aléatoire, ou espérance.

Définition 7. *Espérance*

Soit Ω un univers fini, et p une probabilité sur les évènements d'Ω. Soit X une variable aléatoire de Ω dans $\mathbb{R}$. On appelle *espérance* de X, et on note $\mathbb{E}(X)$, le nombre réel :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\text{valeurs } x \text{ prises par} X} x\ p(X = x)$$

Précisons que la notation $p(X = x)$ est un abus, cette probabilité est en fait relative à l'ensemble des évènements w faisant que $X(w)$ vaille x. On devrait noter en toute rigueur $p(X = x) = P(\{w, X(w) = x\})$.

On peut enfin définir clairement la stratégie à adopter. Supposons qu'au tour où il ne reste plus que n boîtes, la banque nous propose de racheter notre boîte pour m €. Si le candidat est entièrement rationnel, si $E(X_n) \leq m$, il doit vendre sa boîte, et si $E(X_n) \geq m$, il doit garder sa boîte.

En somme, cette stratégie peut sembler assez intuitive, et on peut se demander pourquoi il a fallu modéliser pendant si longtemps. En réalité, notre modèle est aussi intéressant pour ce qu'il ne dit pas.

En effet, dans notre modèle, même si le tour n du jeu est influence par le tour précédent, la stratégie, elle, ne l'est pas. Il n'y a qu'à calculer la valeur moyenne du gain du candidat sans se préoccuper de la boîte qui vient d'être ouverte.

Cependant, dans les vraies parties d'*A prendre ou à laisser*, les candidats ne sont pas aussi rationnels qu'un probabiliste averti. Ils ont tendance, après avoir découvert une boîte contenant une forte somme d'argent, à prendre beaucoup plus de risques : c'est-à-dire qu'ils vont refuser des offres plutôt avantageuses de la banque en se raccrochant à l'espoir que leur boîte contient une forte somme d'argent.

Par ailleurs, notre modèle vient aussi rappeler que toutes les boîtes jouent des rôles symétriques : quand on calcule le gain moyen du candidat, on ne fait en fait que calculer la somme moyenne contenue dans l'ensemble des boîtes. Très concrètement, cela signifie qu'à moins d'être capable de décrypter la stratégie qu'a en tête la banquier quand il propose un échange de boîtes, on ne perd ni ne gagne rien au change en échangeant de boîte.

Néanmoins, notre modèle a aussi ses limites. Il ne fait notamment pas la différence entre la valeur relative d'une somme d'argent par rapport à une autre. Considérons un exemple simple : il reste les boîtes 1 et 2 en jeu, ainsi que les sommes de 1 € et de 1 000 000 €. Le banquier fait une offre à 400 000 €. En principe, le candidat devrait refuser l'offre du banquier, car son espérance de gain est de 500 000.5 €.

Or, dans un certain sens, il est déjà assuré de gagner 400 000 €. Pour en gagner 100 000 de plus, il prend donc de risque de perdre ces 400 000 €. Il faut donc que le candidat s'interroge sur la valeur relative d'un million d'euros par rapport à quatre cent mille euros. Et cela, notre modèle ne le dit pas.

6 Que se passe-t-il quand on joue une infinité de fois à A prendre ou à laisser ?

Notre démarche de construire un modèle qui soit cohérent avec ce qu'on observe dans la réalité n'est évidemment pas une idée neuve. Dès la création des premières théories probabilistes, le lien avec les statistiques était déjà très fort. En effet, on remarque que la probabilité d'un résultat lors d'une expérience correspond à la fréquence d'apparition de ce résultat si on répète l'expérience aléatoire un grand nombre de fois.

Prenons l'exemple d'une mini-partie d'*A prendre ou à laisser*, avec deux boîtes et les sommes 0 et 1 €. La probabilité que le candidat gagne 1 € est de $\frac{1}{2}$. Et si on effectue un très grand nombre de parties de ce type, en réattribuant au hasard les deux boîtes à chaque fois, alors le candidat gagnera 1 €dans environ 50 % des cas.

Ce phénomène, qui apparaît pour un grand nombre de répétitions de la même expérience aléatoire, a été formalisé en mathématiques sous le nom de *loi des grands nombres*. Il a plusieurs formulations différentes, et nous allons nous intéresser à sa version *forte* : le théorème nécessite des présupposés plus difficiles à obtenir que dans la version faible, mais fournit en contrepartie un résultat plus puissant.

Une de ces hypothèses est d'ailleurs que le résultat des expériences aléatoires précédentes n'influent pas sur le résultat de celle que l'on va effectuer. Cela correspond à la notion mathématique d'*indépendance*, qu'il nous définir avant d'aller plus loin.

Indépendance et conditionnement

La notion d'indépendance est une notion très importante en probabilités, et s'explique d'abord mieux sur des évènements. Concrètement, deux évènements sont indépendants si savoir que l'un d'entre eux se réalise n'apporte aucune information quant à la réalisation de l'autre évènement.

Par exemple, imaginons que je sois face à cent portes, qu'il y a 99 chèvres et une seule Ferrari derrière ces portes. Alors la probabilité que je choisisse la bonne porte est de $\frac{1}{100}$. Mais l'animateur me dit sans mentir que la Ferrari est derrière l'une des 50 premières portes, alors, sachant cela, la probabilité que je choisisse la bonne porte est de $\frac{1}{50}$. On dira alors que les évènements "*Le candidat choisit la bonne porte*" et *la Ferrari est derrière les 50 premières portes* ne sont pas indépendants.

Inversement, imaginons que l'on décide de lancer une pièce puis un dé équilibré. Alors les évènements "*tomber sur pile*" et "*Tirer un 6*" sont indépendants. En probabilités, la notion d'indépendance a été construite afin de pouvoir calculer facilement les probabilités quand elles font intervenir des évènements indépendants.

Définition 8. *Evènements indépendants* Soient A et B deux évènements de Ω. On dit qu'ils sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

Autrement dit, la probabilité que A et B se produisent au cours d'une même expérience aléatoire ne dépend que de leur probabilités respectives, et non d'une quelconque interaction entre les deux. Par exemple, si l'on veut calculer la probabilité de tomber sur pile et de tirer un six, on a juste à multiplier $\dfrac{1}{2}$ par $\dfrac{1}{6}$ pour obtenir $\dfrac{1}{12}$.

On obtiendrait également $\dfrac{1}{12}$ si l'on dénombrait tous les cas possibles, ce qui est logique : quand on dénombre les cas, on multiplie les 6 résultats possibles du lancer de dé par les 2 résultats possibles du lancer de pièce. Cela revient bien à dire que le dé n'est pas influencé par le résultat de la pièce, puis qu'on le traite de la même manière quelque soit le résultat de la pièce.

Si les évènements ne sont pas indépendants, on peut également utiliser la relation qui les lie pour calculer des probabilités plus facilement.

Définition 9. *Probabilité conditionnelle*

Soit B un évènement de probabilité non nulle. On appelle *probabilité de* A sachant que B est réalisé le nombre $\dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$. On le note $p_B(A)$ ou bien $p(A|B)$.

Par exemple, dans le jeu des 100 portes, si l'on veut calculer la probabilité que le candidat trouve la bonne porte alors qu'il sait que la Ferrari est derrière les 50 premières portes, on aura :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{1/100}{1/2} = frac2100 = frac150$$

.

Précisons que l'évènement $A \cap B$ correspond à "*Le candidat choisit une porte et la Ferrari est derrière les 50 premières portes*". Comme le candidat, dans le calcul de la probabilité de $A \cap B$, ne sait pas que la Ferrari est derrière les 50 premières portes, on a bien $p(A \cap B) = \dfrac{1}{100}$.

Petite probabilité deviendra grand nombre

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème tant attendu sur le comportement fréquentiel des expériences aléatoires.

Théorème 1. Kolmogorov, 1929. *Loi forte des grands nombres*

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires identiquement distribuées et indépendantes, définies sur un univers fini Ω. On note μ l'espérance de X_0, qui est aussi celle de X_n pour tout n entier. On définit S_n comme la somme des n premières variables aléatoires : $S_n = X_0 + X_1 + ... + X_n$. Alors

$$P(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \mu) = 1$$

.

On dit que la suite $\frac{S_n}{n}$ converge *presque sûrement* vers μ, et on note $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mu$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Nous ne pourrons pas démontrer rapidement ce théorème avec les outils dont nous disposons aujourd'hui. Néanmoins, il mérite que l'on s'y attarde un instant, ne serait-ce que pour décrypter son sens.

Tout d'abord, on nous parle d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$. Pour nous, cela va simplement correspondre à répéter une infinité de fois une partie d'*A prendre ou à laisser* avec les deux boîtes, et considérer à la n-ième partie la variable aléatoire qui correspond à la somme contenue dans la boîte du candidat. Pour rappel, on a que $p(X_n = 1) = \frac{1}{2}$ et $p(X_n = 0) = \frac{1}{2}$. Rappelons aussi que désormais l'entier n ne compte pas le nombre de boîtes dans la partie, qui est tout le temps de 2, mais bien le numéro de la partie en cours.

Ensuite, on nous dit que les variables aléatoires sont identiquement distribuées. Cela signifie que quelle que soit la valeur que peuvent prendre les variables aléatoires que l'on considère, toutes les variables aléatoires ont la même probabilité de prendre ladite valeur. Dans notre exemple cela se traduit par le fait que pour tout n, m entiers naturels, $p(X_n = 1) = p(X_m = 1) = \frac{1}{2}$ et $p(X_n = 0) = p(X_m = 0) = \frac{1}{2}$.

Les variables aléatoires considérées doivent également être indépendantes. La notion d'indépendance de variables aléatoires généralise celle de l'indépendance d'évènements. On dit que deux variables aléatoires sont indépendantes si la valeur prise par l'une n'influence pas sur la valeur prise par l'autre. En termes mathématiques, on aura :

$$\text{X, Y indépendantes} <=> \forall (x, y) \in \mathrm{Im}(X, Y), p(X = x \cap Y = y) = p(X = x) \times p(Y = y).$$

Dans notre exemple, on fera l'hypothèse que c'est le cas. Si on redistribue à chaque partie les boîtes au hasard, il n'y a pas de raison que le candidat ait plus ou moins de chance de gagner 0 ou 1 € s'il a gagné 0 € lors de la partie précédente. L'indépendance des parties successives d'*A prendre ou à laisser* est donc un choix de modélisation.

D'ailleurs, les probabilistes, qui travaillent souvent avec des variables aléatoires abstraites, peuvent rarement démontrer l'indépendance des variables, et la prennent donc également dans leur modèle.

Commentons maintenant la conclusion de notre théorème : $P(\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{S_n}{n} = \mu) = 1$. Cela signifie que l'on est sûr, à des évènements de probabilités nuls près (qui peuvent exister, comme on l'a vu dans la première partie), si l'on calcule le gain moyen du candidat sur une infinité de partie, on obtiendra exactement le gain qu'il peut espérer obtenir en jouant une fois. Dans notre exemple, le candidat aura en moyenne gagné 0.5 € à chacune des partie qu'il aura jouer.

Métaphysiquement, ce théorème a des conséquences énormes : il veut dire qu'une quantité déterministe, i.e. une valeur moyenne, émerge d'un hasard lorsqu'on le provoque une infinité de fois. Pourtant, chaque expérience est indépendante de la précédente ! Les boîtes ne se concertent pas entre elles pour que sur un grand nombre de partie, le candidat gagne à peu près 0.5 €Mais dans les faits, c'est ce qu'il se produit.

Personnellement, j'en ai conclu que cela voulait dire que le hasard, ce n'était pas le n'importe quoi.

Conclusion

Intrigués par l'engouement pour les jeux de hasard, nous nous sommes plongés dans le monde des probabilités afin de mieux les comprendre. Il en est ressorti que, grâce à la construction d'une théorie rigoureuse, il était possible d'obtenir des résultats très clairs quant aux stratégies à adopter ou à ne pas adopter quand on joue.

Nous avons également vu qu'à partir d'hypothèses très intuitives, la loi des grands nombres nous permet de caractériser précisément le comportement d'une suite d'expériences aléatoires. De nos jours, l'obtention de lois caractérisant aux temps longs le comportement de variables aléatoires données fait l'objet de beaucoup de travaux de recherches. En effet, ce type de probabilités a beaucoup d'applications dans d'autres branches des sciences, comme la génétique ou l'économie.

Mais n'oublions que calculer des probabilités, par-delà le fait de faire avancer l'humanité, permet de gagner un maximum d'argent à *A prendre ou à laisser*. Maintenant que vous êtes savants, à vous de jouer !

A vous de jouer !