C'est graphe docteur ?

Lucas Vacossin

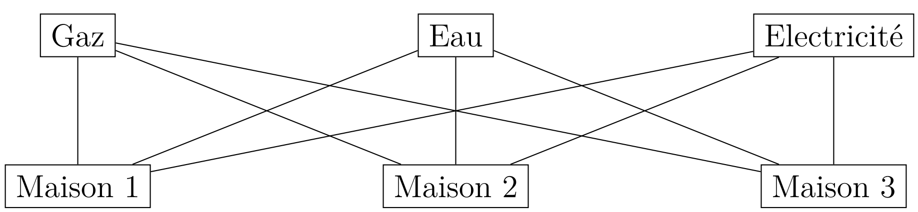
16 octobre 2017

Séminaire "Maths Pour Tous"

Table des matières

Introduction : Un problème de tuyaux !

Commençons par citer Georges Perec avec cet extrait de *Je me souviens* (1978) [1] : "Je me souviens des heures que j'ai passées, en classe de troisième, je crois, à essayer d'alimenter en eau, gaz et électricité, trois maisons, sans que les tuyaux se croisent". Il s'agit en fait d'un problème que l'on doit à Henry Dudenay. Cette énigme formulée dans son ouvrage *Amusements in Mathematics* (1917)[2] et qu'il appelle "l'énigme du gaz, de l'eau et de l'électricité" s'énonce comme suit : "**Un lotissement de trois maisons doit être équipé d'eau, de gaz et d'électricité. La règlementation interdit de croiser les canalisations pour des raisons de sécurité. Comment faut-il faire ?**"



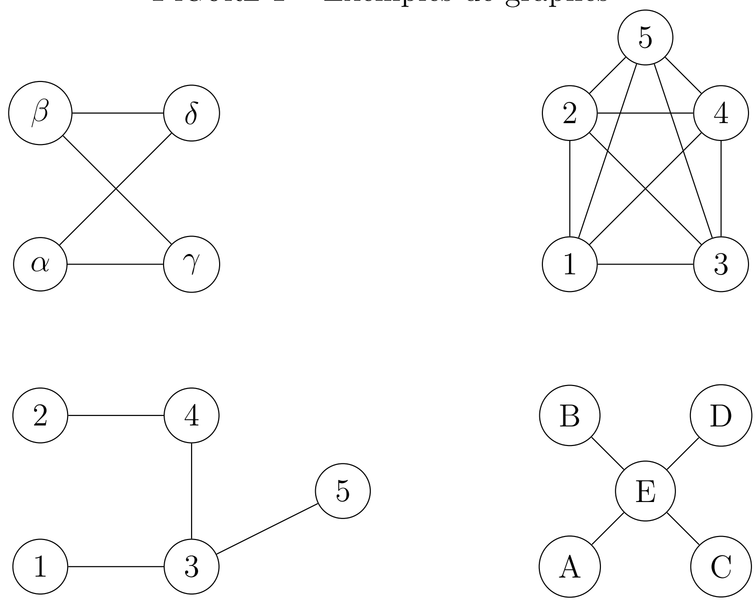
L'objectif de cet exposé est alors de présenter des outils mathématiques adaptés à ce problème pour le résoudre. Ces outils, ce sont les **graphes**.

1 Qu'est-ce qu'un graphe ?

1.1 Définition des graphes

Avant de donner une définition formelle, il est intéressant de se faire une première idée de ce qu'est un graphe à travers ces différents exemples. Ce ne sont ni plus ni moins que des points reliés par des arêtes. C'est une notion que l'on croise dans la vie de tous les jours sous différentes formes !

FIGURE 1 – Exemples de graphes



En témoigne la figure suivante qui peut vous être familière ! On pourrait presque se contenter de cette définition pour la suite de l'exposé : un graphe est un ensemble de points et d'arêtes reliant ces points. Mais essayons d'être un peu rigoureux et de donner une définition formelle d'un graphe.

FIGURE 2 – La carte du métro parisien est un graphe : les points sont les stations et les arêtes les lignes de métro entre chaque station

Définition 1.1. Un **graphe** G est un couple (V, E) où V est un ensemble (quelconque) appelé **ensemble de sommets** et E est un ensemble de paires d'éléments de V, appelé **ensemble des arêtes**.

Remarque. Mais qu'est-ce qu'un couple ? Il s'agit de deux éléments ordonnées. Un couple est noté de la façon (a, b). A ne pas confondre avec la paire, où l'ordre ne compte pas et que l'on note $\{a, b\}$.

Exemple. Illustrons cette définition à l'aide des graphes de la figure 1 : de gauche à droite et de haut en bas, les graphes représentés sont :

— $G = \Big(\Big\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\Big\}, \Big\{\{\alpha, \gamma\}, \{\alpha, \delta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\beta, \delta\}\Big\}\Big)$

— $G = \Big(\Big\{1, 2, 3, 4, 5\Big\}, \Big\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\Big\}\Big)$

— $G = \Big(\Big\{1, 2, 3, 4, 5\Big\}, \Big\{\{1, 3\}, \{3, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 2\}\Big\}\Big)$

— $G = \Big(\Big\{A, B, C, D, E\Big\}, \Big\{\{A, E\}, \{B, E\}, \{D, E\}, \{C, E\}\Big\}\Big)$

Mais alors, comme vous l'aurez peut-être compris, un graphe, selon la définition donnée, ne depend d'aucune repésentation. Pourtant, si un graphe n'est rigoureusement qu'un ensemble de sommets et d'arêtes, on ne peut (quasiment) pas se passer d'une représentation. **Représenter un graphe, c'est tout simplement dessiner les sommets et pour chaque arête, relier entre eux les sommets concernés.**

Passons donc à un petit entraînement pour jongler avec cette définition d'un graphe. Dans les deux cas suivants, les deux graphes représentés sont-ils les mêmes ?

Figure 3 – S'agit-il des mêmes graphes ?

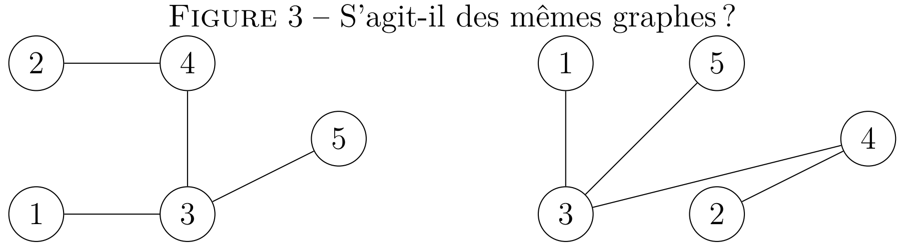
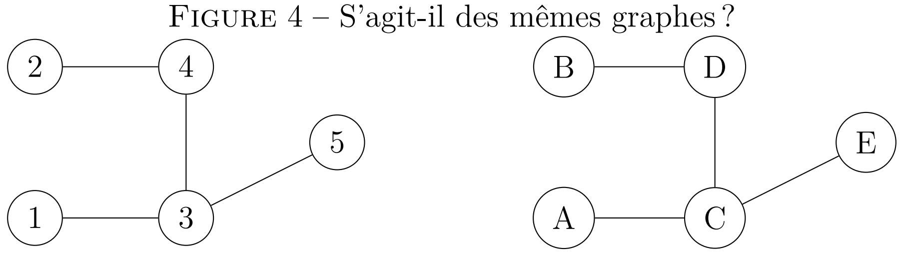


Figure 4 – S'agit-il des mêmes graphes ?



Dans le premier cas (figure 3), en regardant bien, on se rend vite compte que les cinq sommets sont les mêmes et que les arêtes relient toutes les mêmes sommets. Ce sont donc les mêmes graphes. Dans ce second cas (figure 4), il serait tentant de dire oui, n'est-ce pas ? Cependant, si on applique rigoureusement la définition d'un graphe les ensembles de sommets ne sont pas les mêmes : dans un cas $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dans l'autre $V = \{A, B, C, D, E\}$. Ce ne sont donc pas les mêmes graphes. Pourtant, on reste persuadé que ces deux graphes sont similaires : on a envie de dire : "A=1 ; C = 3 ; E=5 ; D=4 ; B = 2 ". Peut-on régler cela ? C'est l'objet de la prochaine partie !

1.2 à isomorphisme près ...

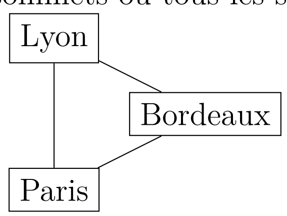
Titre effrayant, n'est-ce pas ? Mais pourtant, vous allez voir, ce qu'on entend par **à isomorphisme près**, ce n'est pas bien sorcier.

Reprenons l'exemple, de la figure 4. J'affirme que ces deux graphes sont **isomorphes**. Cette notion vient du grec : $\iota\sigma o$ qui signifie même et $\mu o\rho\phi os$ qui veut dire forme. Ces deux graphes ont bien la même forme, non ? Essayons alors de définir cette notion d'isomorphisme.

Définition 1.2. Deux graphes $G = (V, E)$ et $\Gamma = (S, A)$ sont dits **isomorphes** si on peut renommer chacun des sommets de V à l'aide des sommets de S de telle sorte qu'en effectuant le changement de nom pour les arêtes de E, on obtient exactement toutes les arêtes de A.

Dès lors, si l'on dit que l'on considère des graphes **à isomorphisme près**, on veut dire que si deux graphes sont isomorphes, on les considère identiques. Autrement dit, on se fiche de la façon d'appeler les sommets. On ne s'intéresse alors plus à un graphe précis et concret mais à un certain type de graphes, et donc en un sens à un graphe absrait. Par exemple, on pourra parler "**du**" graphe à 3 sommets où tous les sommets sont reliés entre eux sans ambiguité : pas besoin de préciser les sommets (Lyon, Paris, Bordeaux ou Nice, Cannes, Menton !), puisqu'ils ne nous intéressent pas.

Figure 5 – Un graphe à 3 sommets où tous les sommets sont reliés entre eux



Si tout cela vous paraît plutôt flou, dites-vous que si deux graphes ont la même tête mais pas forcément les mêmes sommets, alors on est en droit de penser que c'est les mêmes. Dans notre problème initial, peut importe que l'on dise "Gaz, Eau, Electricité" et "Maison 1,2 ou 3". L'important est que l'on ait deux groupes de sommets (les maisons et les besoins) et chaque sommet d'un groupe doit être reliés aux 3 sommets de l'autre groupe.

Remarque. La notion d'isomorphisme est une notion important en mathématiques. Dans de nombreux cas, on ne considère les objets qu'à isomorphisme près.

1.3 Graphes particuliers

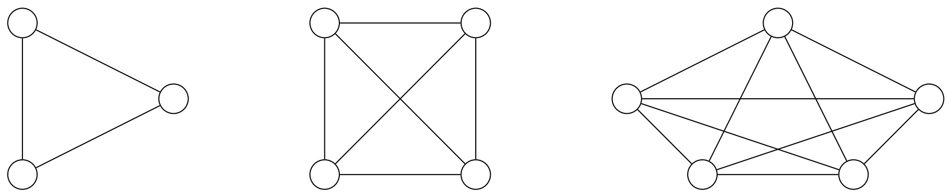
On peut citer deux grandes catégories de graphes : les **graphes complets** et les **graphes bipartis**. Dans notre cas, il s'agit d'un graphe biparti comme nous le verrons.

Les graphes complets sont les graphes les plus simples que l'on peut imaginer.

Définition 1.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le **graphe complet** K_n est le graphe à n sommets dans lequel tous les sommets sont reliés entre eux.

Remarque. $\mathbb{N}^*$? Ce n'est rien d'autre que l'ensemble des entiers strictement positifs : $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

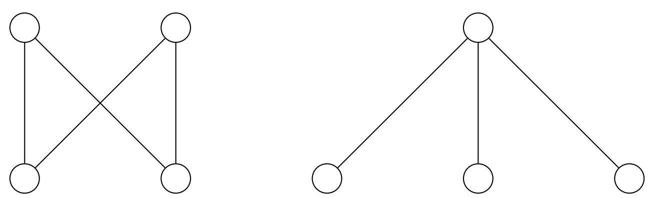
Exemple. K_3, K_4, K_5

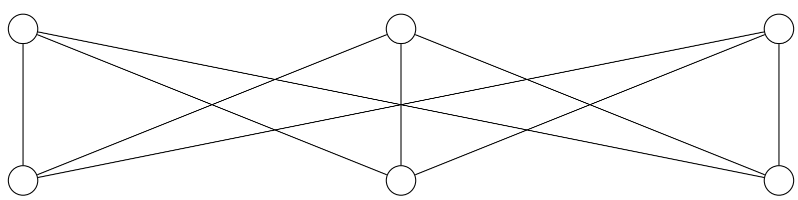


Définition 1.4. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. **Le graphe biparti** $K_{n,p}$ est le graphe à $n+p$ sommets dans lequel on peut partitionner l'ensemble des sommets en deux sous-ensembles, un de taille p noté A_p, l'autre de taille n noté A_n, tels que l'ensemble des arêtes est exactement $\{\{a,b\}, a \in A_p, b \in A_n\}$.

Exemple. $K_{2,2}, K_{3,1}, K_{3,3}$

$K_{3,1}$ est le graphe à 4 sommets dans lequel on peut mettre en évidence un ensemble de 3 sommets et un ensemble d'un sommet tels que chaque arête ait une extrémtié dans l'un et l'autre. Autrement dit, c'est le graphe à 4 sommets où l'un des sommets est relié au 3 autres.





Et $K_{3,3}$, ce n'est alors rien d'autre que le graphe que nous cherchons à étudier.

2 Notre problème : une question de planarité

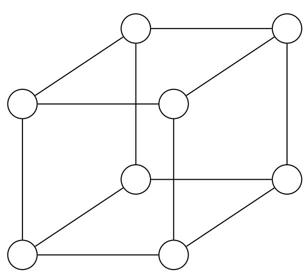
Voilà que nous avons introduit l'objet mathématique qui nous permet de modéliser notre problème : les graphes. Il va alors maintenant falloir traduire notre problème initial en terme de problème mathématique portant sur les graphes. C'est l'objet de cette section.

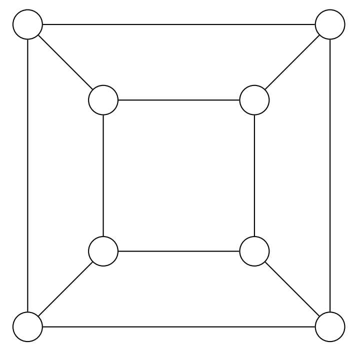
2.1 Graphes planaires

Rappelons le problème que l'on cherche à résoudre : peut-on installer les tuyaux entre les maisons et les stations d'eau, de gaz et d'électricité sans qu'ils ne se croisent. En terme de graphes, cela revient à demander si l'on peut représenter le graphe $K_{3,3}$ sans que ses arêtes ne se croisent, où, on le rappelle, représenter un graphe c'est dessiner les sommets et arêtes reliant les sommets. Cela motive alors la définition suivante.

Définition 2.1. Un **graphe planaire** est un graphe pour lequel **il existe** une représentation dans laquelle les arêtes ne se croisent pas.

Remarque. Attention ! Notez bien le "il existe". Ce n'est pas parce qu'un graphe est représenté avec des arêtes qui se croisent que celui-ci n'est pas planaire, comme en témoigne la figure ci-contre. Il s'agit d'une représentation non planaire du cube. Pourtant le cube est bien un graphe planaire puisqu'il existe une représentation planaire.





Il est alors beaucoup plus aisé de montrer qu'un graphe est planaire que le contraire. En effet, on ne peut pas tester l'infinité des représentations possibles pour montrer qu'un graphe n'est pas planaire. Il faut donc d'autres outils pour montrer cela.

Avec cette dernière définition, notre problème devient alors le suivant : **Le graphe $K_{3,3}$ est-il planaire ?**

2.2 Graphes connexes

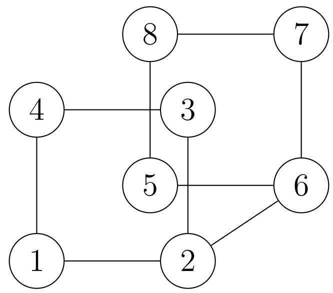
Avant de nous attaquer à la résolution en elle-même, nous avons encore besoin de quelques nouvelles définitions et résultats sur une catégorie de graphes bien utiles.

Définition 2.2. Soit G un graphe.

Un **chemin** dans G est une suite finie de sommets telle que deux sommets consécutifs sont reliés par une arête.

Un **cycle**(élémentaire) dans G est un chemin passant au plus une fois par une arête tel que le premier et le dernier sommet sont les mêmes.

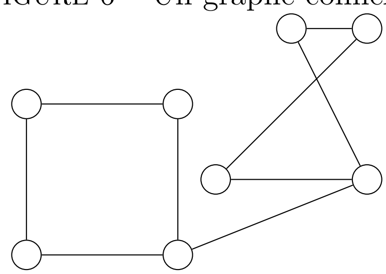
Exemple. Dans ce graphe, $(1,2,6,7,8)$ est un chemin, mais $(1,3,7)$ n'en est pas un puisqu'il n'y a pas d'arêtes entre 1 et 3.$(1,2,3,4,1)$ est un cycle.



Définition 2.3. Un graphe est **connexe** si deux sommets de ce graphe sont toujours reliés par un chemin.

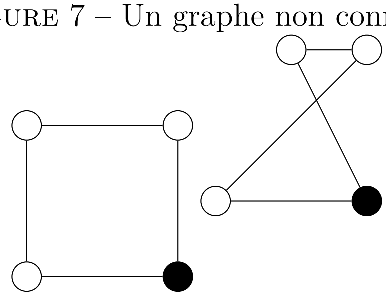
Exemple. Le graphe de la FIGURE 6 est connexe car on observe que l'on peut toujours relier deux sommets par un chemin.

FIGURE 6 – Un graphe connexe



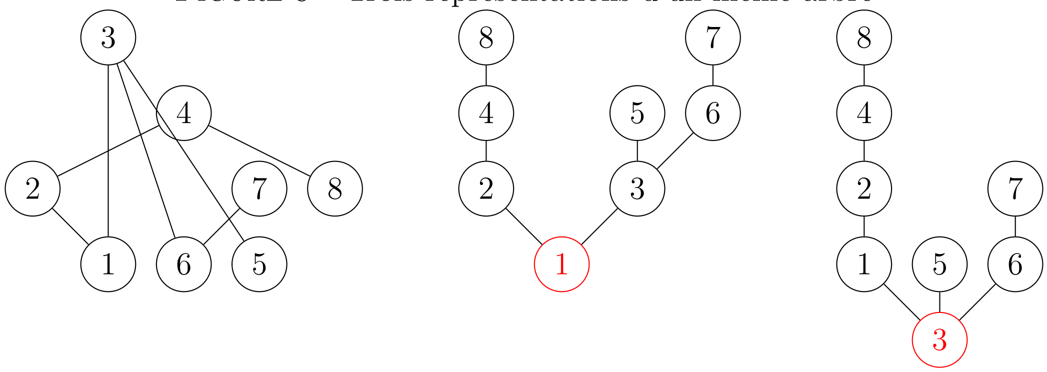
Exemple. Le graphe de la FIGURE 7 n'est pas connexe car on voit que l'on ne peut pas relier les deux sommets noirs.

FIGURE 7 – Un graphe non connexe



Pourquoi introduire les graphes connexes me direz-vous ? La raison est simple : $K_{3,3}$ est connexe. Mais en fait, il existe des graphes connexes encore plus simples : les arbres.

Figure 8 – Trois représentations d'un même arbre



2.3 Arbres

Définition 2.4. Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle.

Exemple. Les graphes de la FIGURE 8 représentent tous le même arbre. On vérifie en effet que ces graphes sont connexes et sans cycle et que ce sont les mêmes.

Si nous introduisons cette notion, ce n'est pas cette fois car $K_{3,3}$ est un arbre : en effet, il y a des cycles dans $K_{3,3}$. Mais c'est parce que les arbres sont des objets relativement simples. Le résultat suivant, que nous allons prouver, motive que l'on s'intéresse aux arbres avant d'étudier les graphes connexes : *Tout graphe connexe s'obtient à partir d'un arbre auquel on a ajouté un certain nombre d'arêtes.*

Remarque. En choisissant un sommet d'un arbre (on dit qu'on enracine l'arbre), on peut représenter l'arbre avec une structure arborescente dans laquelle le sommet choisi est la racine, en témoigne la figure 8 où le sommet 1 puis le sommet 3 ont été choisis.

Comme nous l'avons annoncé, nous voulons prouver le résultat énoncé. Pour cela, nous allons donner quelques définitions supplémentaires sur les arbres :

Définition 2.5. Dans un graphe, le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

Définition 2.6. Dans un arbre, une **feuille** est un sommet de degré 1.

Remarque. Le terme de feuille provient bien entendu de la représentation arborescente des arbres. Les feuilles sont alors les derniers étages du graphe. Dans la figure ci-dessus les feuilles sont les sommets 8,5 et 7.

Nous admettrons le résultat suivant mais vous pouvez vous en convaincre ! (Que se passerait-il si un arbre n'avait pas de feuille ?)

Lemme 2.1. Tout arbre possède au moins une feuille.

Lemme 2.2. Dans un arbre, le nombre a d'arêtes et le nombres n de sommets sont reliés par la relation :

$$a = n - 1$$

Démonstration. Il s'agit d'un raisonnement par récurrence sur le nombre n de sommets de l'arbre.

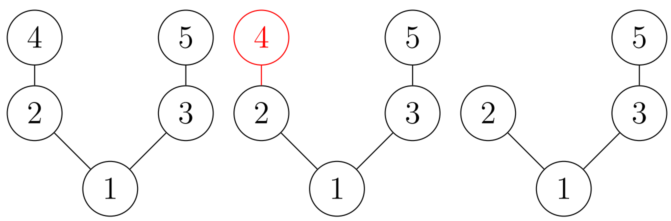
Rappel : C'est quoi la récurrence ? Il s'agit d'un mode de raisonnement dans lequel on veut prouver une propriété $\mathcal{P}_n$ pour tout entier (positif) n. Pour cela, on commence par prouver la propriété pour le plus petit entier (on parle d'**initialisation**). Ensuite, on suppose que l'on a prouvé $\mathcal{P}_n$ et on démontre, à partir de cette propriété, la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$. On parle d'**hérédité**. On dit qu'on applique l'hypothèse de récurrence. Enfin, on peut conclure que la proprité est vraie pour tout entier n.

Dans notre cas, la propriété est : $\mathcal{P}_n$="Tout arbre à n sommets possède $n-1$ arêtes". Elle a un sens pour $n \geq 1$.

Initilalisation : Un arbre à 1 sommet n'a pas d'arête. La relation est donc respectée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la relation vraie pour tout arbre à n sommets. Considérons un arbre à $n+1$ sommets. Le résultat précédent nous assure qu'il existe (au moins) une feuille. On décide donc d'en choisir une de retirer ce sommet et l'unique arête qui le relie au reste de l'arbre. Le graphe obtenu après cette opération reste un arbre.

Pourquoi vous demandez-vous peut-être ? D'une part, le graphe est encore connexe puisque si un chemin reliant deux sommets utilisaient l'arête enlevée, comme on a retiré une feuille, il y avait forcément un aller-retour par cette arête, on peut donc relier les deux sommets sans utiliser cette arête. D'autre part, en enlevant une arête, on ne peut pas créer de cycle. Le graphe reste sans cycle. On a donc bien un arbre. La procédure est illustrée ci-dessous.



On a enlevé 1 sommet et 1 arête. L'arbre obtenu est donc un arbre à $n-1$ sommets. On peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence. Cet arbre a $n-2$ arêtes. L'arbre initial a donc $n-2+1 = n-1$ arêtes. La relation est donc vraie.

Le principe de récurence permet alors de conclure : la relation est vraie pour tout arbre.

□

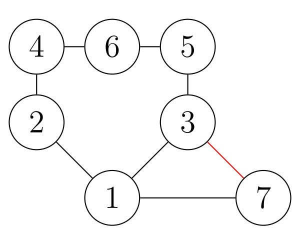
Passons maintenant au résultat annoncé au début de cette partie.

Lemme 2.3. Tout graphe connexe s'obtient à partir d'un arbre auquel on a ajouté un certain nombre d'arêtes.

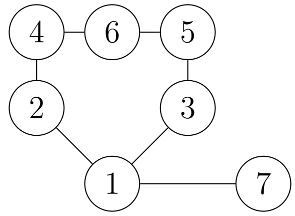
Démonstration. Il s'agit une nouvelle fois d'une récurrence mais cette fois-ci sur le nombre d'arêtes du graphe connexe. La propriété est $\mathcal{P}_n$ = "Tout arbre connexe à n arêtes s'obtient à partir d'un arbre auquel on a ajouté des arêtes."

Initialisation : Un graphe connexe à 0 arêtes est un arbre à 1 sommet. Il n'y a rien à faire.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai pour tout graphe connexe à n arêtes et considérons G un graphe à $n+$ arêtes.



Si G n'a pas de cycle, c'est un arbre et il n'y a rien à faire. Sinon. Choisissons deux sommets a et b reliés par une arête dans un cycle et retirons cette arête pour obtenir un nouveau graphe G'. Afin d'illustrer la procédure, aidons-nous du graphe dessiné. Nous avons choisi les sommets $a = 3$ et $b = 7$.



Prouvons que G' est un graphe connexe. Cela nous permettra de conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence.

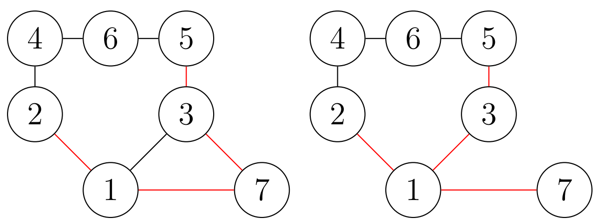
Soit x et y deux sommets de G'. Nous devons montrer qu'il existe dans G' un chemin entre x et y. Dans notre exemple, $x = 5$ et $y = 2$.

Dans G, il existe un chemin reliant x et y puisque G est connexe.

Si ce chemin ne passe pas par l'arête retirée, le chemin est dans G' : c'est le cas par exemple si on considère le chemn $(5, 6, 4, 2)$ dans l'exemple.

Comment faire si ce chemin passe par l'arête retirée : par exemple si l'on a considéré le chemin $(5, 3, 7, 1, 2)$. Disons que ce chemin passe d'abord par a. On suit le même chemin de x à a. Ici on fait donc $(5, 3)$. Puis au lieu de prendre l'arête $\{a, b\}$, comme celle-ci appartient à un cycle, on peut aller de a à b en passant par l'autre côté du cycle : au lieu de faire $(3, 7)$ on fait $(3, 1, 7)$. Enfin, on reprend le chemin pour aller de b à y : $(7, 1, 2)$.

Le chemin global dans notre exemple est donc $(5, 3, 1, 7, 1, 2)$.



Ces deux choses étant prouvées, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à G' qui peut donc s'obtenir à partir d'un arbre en rajoutant des arêtes. Puis on rajoute l'arête $\{a, b\}$ pour obtenir G.

Le principe de récurrence permet de conclure. $\square$

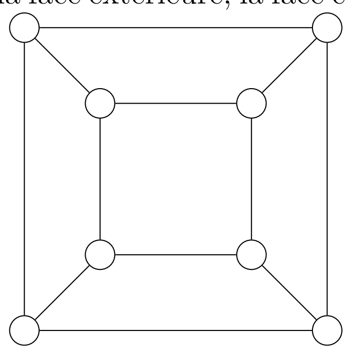
3 Résolution du problème

Pour répondre au problème initial, il nous faut finalement répondre à la question : $K_{3,3}$ est-il planaire ? C'est l'objet de cette partie.

3.1 La formule d'Euler

Définition 3.1. Dans un graphe planaire G, une **face** est une région maximale du plan délimitée par un ensemble d'arêtes de G et ne contenant aucune arête. Le **degré** d'une face F est le nombre d'arêtes délimitant F, noté $\deg F$.

FIGURE 9 – Le cube posède 6 faces : la face extèrieure, la face centrale carrée et les 4 faces lattérales.



Proposition 3.1. La somme des degrés des faces d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes. Ce qui se résume par la formule, a étant le nombre d'arête du graphe.

$$\sum_{F \text{ face}} \deg F = 2a$$

Démonstration. Une arête est sur le bord de deux faces. En parcourant les faces, chaque arête est donc comptée deux fois. □

Remarque. Le symbole $\sum$ est le symbole somme.

Théorème 3.1. Soit G un graphe planaire connexe. Notons n le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de face. Alors :

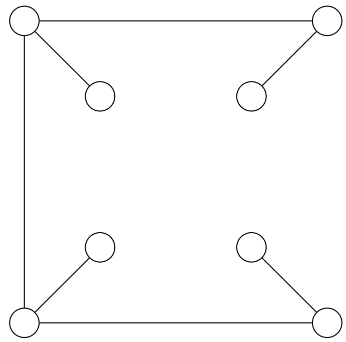
$$n - a + f = 2$$

Démonstration. On a vu que tout graphe connexe peut s'obtenir à partir d'un arbre en ajoutant des arêtes. Il suffit donc de s'assurer que ce résultat est vrai pour un arbre et qu'il reste valable lorsque l'on ajoute une arête **qui ne croise pas les autres** (puisque le résultat concerne les graphes planaires).

Cas d'un arbre : un arbre possède 1 face. On sait de plus que le nombre d'arêtes et de sommets sont reliés par $n - 1 = a$. On a donc

$$n - a + f = n - (n - 1) + 1 = 2$$

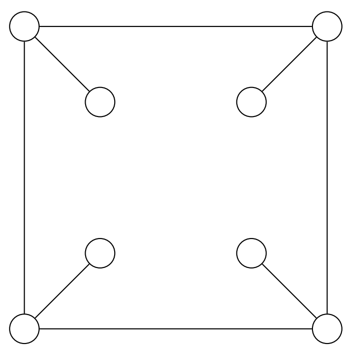
.



Rajout d'une arête ne croisant pas les autres : Le nombre de sommets ne change pas. Le nombre d'arête augmente d'une unité.

Qu'en est-il du nombre de faces ? Pour la figure représentée ici, on passe de 1 à 2 faces. On voudrait montrer que l'on augmente le nombre de faces d'une unité. L'arête ajoutée l'est à l'intérieure d'une face. (Dans notre exemple, elle est rajoutée dans la face extérieure). Mais donc, ce qui était alors une face n'en est plus une puisqu'elle contient une arête. Cette arête ajoutée découpe l'ancienne face en deux nouvelles faces. Les autres face ne sont pas affectées par cet ajout : le nombre de face augmente donc bien de 2.

On a donc encore $n-(a+1)+(f+1)=n-a+f=2$.

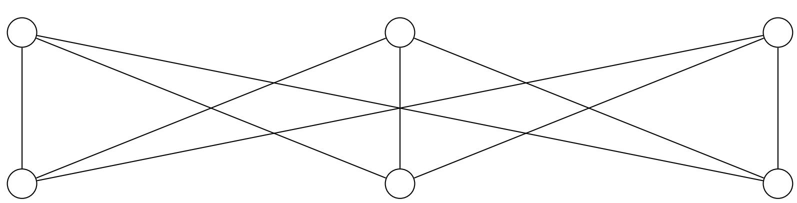


□

3.2 Conclusion

On va alors montrer comment cette formule permet de conclure. Voici le résultat qui permet de résoudre le problème :

Théorème 3.2. $K_{3,3}$ n'est pas planaire.



Démonstration. On utilise un raisonnement par l'absurde.

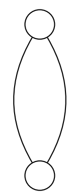
Rappel : c'est quoi un raisonnement par l'absurde ? Pour montrer qu'un résultat est vrai, on suppose qu'il est faux et on montre alors que quelque chose d'impossible (d'absurde !) arrive.

Supposons par l'absurde que $K_{3,3}$ est planaire. Dans ce cas, c'est un graphe planaire connexe. La formule d'Euler s'applique.

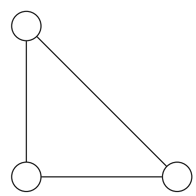
Ce graphe possède 6 sommets et 9 arêtes. Son nombre de face devrait donc être $f = 5$ pour que l'on ait $6 - 9 + f = 2$.

J'affirmeégalement que dans la représentation planaire de $K_{3,3}$, le degré d'une face est au moins 4.

En effet, il ne peut pas y avoir une face de degré 2, sinon deux sommets seraient reliés par deux arêtes, comme suit, et ce n'est pas le cas dans $K_{3,3}$.



Supposons l'existence d'une face de degré 3 : 3 sommets sont en jeu. Puisqu'il n'y a que deux types de sommets (besoin / maison comme on les a appelés, au moins 2 sont de même type. Il seraient alors reliés par une arête. Impossible donc dans notre cher $K_{3,3}$.



Donc toutes les faces sont de degré au moins 4.

Comme il y a 5 faces, la somme des degrés des faces est donc supérieure à $4 \times 5 = 20$. Mais la somme des degrés des faces vaut 2 fois le nombre d'arêtes, c'est-à-dire, $2 \times a = 18$.

$$18 = 2 \times a = \sum_{F \text{ face}} \deg F \geq 5 \times 4 = 20$$

$18 \geq 20$?! C'est absurde. Ceci prouve que $K_{3,3}$ est non planaire. $\square$

Le problème initial est donc résolu : il est impossible de faire en sorte que les tuyaux ne se croisent pas !

4 Pour aller plus loin

4.1 Quels sont les graphes non planaires ?

Un autre graphe simple est non planaire : il s'agit de K_5. En fait, il y a même un théorème difficile et très fort, le **théorème de Kuratowski** qui énonce :

Théorème 4.1. Les graphes non planaires sont exactement les graphes qui possèdent comme sous-graphe $K_{3,3}$ ou K_5.

Nous laisserons le soin aux curieux de voir ce qu'est un sous-graphe par eux-mêmes, bien qu'il ne soit pas difficile d'imaginer ce que c'est.

4.2 Et les graphes dans la vie ?

Les graphes ont de multiples applications dans le vie de tous les jours. Savoir trouver le plus court chemin entre deux sommets d'un graphe est un problème important. Il existe plusieurs algorithmes plus ou moins efficaces pour réaliser cette recherche. Il est notamment commode de travailler avec des graphes dont les arêtes sont pondérées : on leur associe un poids qui peut être vu comme une distance entre les deux sommets. On se rapproche alors du rôle d'un GPS : trouver le plus court chemin entre deux points ! Les graphes sont aussi utilisés dans la modélisation des réseaux internets par exemple.

Leur origine est en fait plutôt récente : l'une des premières apparitions des graphes dans l'histoire des mathématiques serait dûe à Leonhard Euler au milieu du XVIIIème siècle, grâce au fameux problème des 7 ponts de Konigsberg. Les plus curieux sont invités à se renseigner là dessus ! [3]

Voici donc cette petite introduction au monde des grpahes terminée. Pour tous ceux qui veulent continuer à apprendre dessus, il existe de nombreux livres et pages internets, pour tous niveaux. Pour les plus matheux, peut-être que [**?**] vous plaira.

Références

[1] Georges Perec, *Je me souviens*, Souvenir no 292, (ISBN 2012354564)

[2] H. E. Dudeney, *Amusements in mathematics*, pb 251

[3] Leonhard Euler - Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis [archive], *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8*, 1741, pages 128-140

Sur la théorie des graphes, avec une preuve du théorème de Kuratowski dedans,

[4] Reinhard Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag, Heidelberg, Graduate Texts in Mathematics, Volume 173