Une après-midi au PMU

Lucas Journel

20 novembre 2017

Séminaire "Maths Pour Tous"

Table des matières

Introduction

Faisons un petit exercice d’esprit et imaginons qu’une infinité de mathématiciens entrent dans un bar. On numérote ces mathématiciens : 1, 2, 3... Le premier commande une bière, le second commande une demi-bière, puis chaque personne va commander la moitié de ce qu’a commandé le précédent. Le serveur aura-t-il assez de bière pour tous les clients ? Et si oui, quelle en sera la quantité totale ?

Le but de cet exposé sera de répondre à ces questions en introduisant une notion mathématique : les séries. Les séries sont des additions dans lesquelles on retrouve une infinité de termes et qui peuvent décrire des quantités finies ou infinies, mais de tels additions peuvent aussi ne pas avoir de sens du tout.

Comme pour toute notion mathématique, il faut définir ce que l’on souhaite étudier, donner un sens à une *addition infinie*. En effet, tout le monde connait les additions classiques, où l’on additionne un nombre fini de chose, comme les valeurs des pièces de monnaies dans un porte-feuille. Mais si jamais je veut résoudre mon problème de mathématiciens dans un bar, cela ,’est pas suffisant car il y a justement un nombre infini de quantité de bière à additionner. Comment peut-on alors effectuer une telle opération ? L’idée est la suivante : on additionne un nombre fini de nombre, puis on ajoute un à un les termes qui restent. On obtient alors une suite de nombres qui correspond aux additions succesives. Si jamais la suite de ces additions se *rapproche* de plus en plus d’un nombre, on pourra alors le choisir comme valeur de l’addition. Petit problème : Mais que veut dire *se rapprocher* ? Ce terme est aussi à définir ce qui nous mènera à introduire une notion mathématique supplémentaire : celle de limite.

On va donc d’abord étudier ce que peut être la limite d’une suite de nombres, pour définir ensuite l’addition infini et enfin savoir si le serveur peut servir ces mathématiciens ou s’ils devront repartir sans rien.

1 Limite d’une suite

Si l’on prend une suite de nombres quelconque, c’est un dire un nombre que l’on appelle le premier nombre, un second nombre que l’on nomme le second nombre et ainsi de suite, on peut l’appeler u_n : à chaque entier n, u_n est le nombre numéro n que l’on a choisi. Dans notre exemple des mathématiciens, on aurait : $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{4}$, ... et n représente le numéro du mathématicien qui correspond à cette quantité de bière. Prenons un autre exemple pour voir que u_n peut être n’importe quoi : le nombre d’insecte dans une région.

Exemple 1. *Partons d’une année zero où l’on commence à étudier les insectes. On appelle u_n le nombre d’insecte dans la région après n années d’étude. À cause de l’utilisation intensive de* *pesticide, les insectes vont disparaître dans un futur plus ou moins éloigné. Mais comment traduire mathématiquement cette disparition ? Prenons un nombre N quelconque. Comme les insectes disparaissent, il va y avoir une année à partir de laquelle le nombre d'insecte sera inférieure à N, et ce pour n'importe quel N entier non nul. Cela ne prejuge pas du fait qu'il peut y avoir une année où le nombre d'insecte serait plus grand que l'année précédente. Simplement, au bout de 20 ans par exemple, il n'y aura plus jamais d'année avec plus de 10000 insectes. Et voila, on a définit ce que signifie que le nombre d'insecte admet pour limite ou converge ou tend vers 0.*

Plus généralement, si u_n est une suite quelconque et l un nombre, on peut définir la formule $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, ce qui signifie que u_n converge vers l, ie u_n va se rapprocher indéfiniment de l. On procède de la même manière que pour les insectes.

Définition 1. *Si ε est un nombre positif non nul (que l'on peut considerer comme une distance), et que si n est assez grand, alors la distance entre u_n et l va être plus petit que ε. En terme mathématique, cela s'écrit : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $-\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon$.*

Grâce à cette définition, on peut se poser quelques questions : si jamais u_n tend vers l et si on prend une autre suite que l'on appelle v_n qui tend vers l', comment va se comporter $u_n + v_n$ et $u_n \times v_n$? La réponse est celle à laquelle on s'attend : $u_n + v_n$ et $u_n \times v_n$ convergent respectivement vers $l + l'$ et $l \times l'$. En effet, si les insecte volant disparaissent ainsi que les insectes non volants, les insectes en générale vont aussi disparaitrent.

Enfin, mentionnons un axiome qui nous servira par la suite. Un axiome est un résultat que l'on suppose vrai et que l'on ne va donc pas démontrer. Lorsque les mathématiciens définissent les nombres, comme nous le faisons avec les séries, ils incluent dans la définition le résultat suivant :

Proposition 1. *Si l'on prend une suite de nombres tel que chaque nombre est plus grand que le précédent, et que tous les nombres de cette suite sont plus petits qu'une certaine borne, alors la suite admettra une limite.*

Exemple 2. *Pour le voir simplement, imaginons que l'on mesure la taille d'un enfant tous les ans. On définit alors une suite de nombre (sa taille chaque année) croissante (car on ne rapetisse pas) et qui est plus petit qu'une certaine borne : personne ne peut mesurer plus de 3 mètres par exemple. Dans ce cas, l'axiome nous dit que l'enfant va atteindre une taille limite, ce qui est effectivement le cas. C'est pareil pour les suites quelconques de nombres.*

2 La définition des additions infinies et le problème du bar

Nous pouvons maintenant définir ce que vont être les séries, ou sommes infinies.

Définition 2. *Considérons une suite de nombre, par exemple la quantité de bière que vont commander les mathématiciens, que l'on notera encore un. Prenons les n premiers nombres de cette suite, et définissons une nouvelle suite, que l'on appelera suite des sommes partielles :*

$$v_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$$

Le nom vient du fait que l'on ne fait qu'une addition partiel, v_n représente donc la quantité de bière qu'on commandé les n premiers matématiciens. Si la suite v_n converge, c'est-à-dire qu'elle se rapproche toujours plus d'un nombre l, on dira alors que la somme converge, ie que

$$u_0 + u_1 + u_2 + ...$$

existe.

Mais alors comment faire pour savoir si, étant donné une suite de nombres, on peut donner un sens à la somme ? C'est un problème qui dépend de la suite et donc on doit à chaque fois utiliser des méthodes différentes. Regardons en tout cas ce qu'il se passe dans le cas de notre bar.

Théorème 1. *Le barman doit servir deux bières.*

Démonstration. On va utiliser le dernier résultat présenté sur les limites. On appelle u_n la quantité de bière commandé par le mathématicien numéro n et v_n la suite des sommes partielles. Remarquons que comme on rajoute pour chaque somme une quantité positive de bière, chaque somme partielle est supérieure à la précédente : v_n est croissante, ou dans le langage courant les $n+1$ premiers mathématiciens commandent plus de bière que juste les n premiers. Montrons donc qu'elle ne peut pas dépasser une certaine limite.

Je réflechis encore à comment je vais faire ca.

Nous avons montré que la quantité totale de bière commandée a un sens. Mais le barman doit savoir à quelle valeur cela correspond effectivement. Pour cela, il nous faut calculer la somme des commandes. Ici nous avons de la chance, il existe une méthode relativement simple pour le faire, mais dans une grande majorité de cas, on peut montrer que la somme existe sans connaitre sa valeur.

La méthode consiste à tirer parti du fait que chaque terme de la somme est la moitié du précédent et de la définition de la somme. Appelons S la valeur de notre somme. Effectuons un calcul. Pour ce calcul, on effectue des opérations qui peuvent a priori ne pas être autorisées, mais nous justifierons tout cela plus tard. Allons-y !

$$
\begin{aligned}
2 \times S &= 2 \times (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...) && (1)\\
&= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... && (2)\\
&= 2 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...) && (3)\\
&= 2 + S && (4)
\end{aligned}
$$

Donc, $2S - S = 2$ donc $S = 2$.

Nous avons juste décalé les termes de la suite en enlevant le premier pour nous rendre compte que l'on tombait sur la même chose. Maintenant, nous pouvons nous poser une question : avions nous le droit de multiplier la somme par deux pour trouver la somme des termes multiplié par deux et d'enlever le premier terme ? Il faut justifier ce calcul.

Nous avons vu dans la première partie que si l'on prend deux suites admettant des limites, leur produit admettait aussi une limite qui est le produit des limites. En particulier, si on multiplie tous les u_n par 2, on multiplie aussi v_n par 2 et S devient $2 \times S$. De plus on peut aussi retirer un terme de la somme en supprimant un u_n et en le remplacant par 0. On a résolu notre problème, il suffit de servir 2 bières ! □

En réalité, on montre par cette méthode une formule bien plus générale. Si $a > 1$, on a :

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + ... = \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}$$

3 Et si les mathematiciens avaient plus soif ?

Supposons maintenant que les mathématiciens aient un peu plus soif que précédemment. Par exemple le premier prend une bière, le deuxième une demi-bière, le troisième un tiers de bière, et le numéro n prend une n-ième bière. Le barman va-t-il encore pouvoir les servir ? Essayons de répondre à cela.

Appelons u_n la quantité de bière commandée par le numéro n et v_n la quantité de bière commandée par les n premiers mathématiciens, i.e. v_n est la suite des sommes partielles. Effectuons la différence entre la quantité de bière commandée par les $2n$ premiers et celle commandée par les n premiers. Cela s'écrit :

$$v_{2n} - v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$$

Dans cette somme, on peut remarquer que tous les nombres sont plus grand que le dernier $\frac{1}{2n}$ et qu'il y en a n, ce qui nous donne :

$$v_{2n} - v_n > \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

On a ici un problème. En effet, on a vu que si la somme avait une valeur, les sommes partielles se rapprocheraient de cette valeur et v_{2n} est aussi une somme partielle, puisque c'est la quantité de bière commandée par les $2n$ premiers mathématiciens, donc va aussi de rapprocher de la valeur de la somme et donc comme on l'a vu dans la première partie sur les limites, $v_{2n} - v_n$ convergerait vers 0. Or, cette quantité est toujours plus grande que $\frac{1}{2}$: ce n'est pas possible.

On a supposé que la somme avait une valeur finie et on est arrivé à un résultat contradictoire : c'est ce que l'on appel un raisonnement par l'absurde. Comme il ne peut y avoir de résultat contradictoire en mathématique, cela signifie que notre hypothèse de départ est fausse : la somme n'a pas de valeur, n'existe pas selon notre définition des sommes infinies.

Ici, nous sommes dans un cas particulier, et on peut passer outre ce problème pour donner une valeur à cette somme. En effet, comme pour le cas précédent, la suite des sommes partielles est croissante. Cependant, elle n'est plus petite qu'aucune quantité donnée, c'est à dire que pour un nombre fixé quelconque, la suite v_n sera plus grande que ce nombre si n est suffisament grand : on dit que v_n converge vers l'infini.

4 Limite de la définition

Pour finir, il ne faut pas oublier que toute définition a ses limites. En effet, on peut vite se retrouver à faire n'importe quoi avec les séries, du fait de leur définition subtile. Prenons un exemple. On souhaite connaitre la valeur de : $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$. On somme et on soustrait 1 à l'infini. En supposant que cela existe, on peut appeler S cette somme et lui appliquer la même technique que pour les bières :

$$S = 1 - 1 + 1 - 1... = 1 - (1 - 1 + 1 - 1...) = 1 - S$$

Donc $S = \frac{1}{2}$. Petit problème : cette somme n'existe pas. Les valeurs des sommes partielles alternent entre 0 et 1 et ne se rapprochent donc jamais de $\frac{1}{2}$. Il faut alors chercher d'autre définition des sommes infinies.

Conclusion

Les séries sont des objets mathématiques extrêmement riches. En mathématiques, on cherche à savoir si la somme existe, quelle en est la valeur, mais on peut aussi faire bien d'autres choses, elle apparaissent dans tous les domaines. De plus, elles ont aussi de nombreuses applications pratiques. Le problèmes que nous avons étudier peut paraître un peu bête, mais il existe de d'innombrable situations où l'on a besoin de définir des additions infinis. C'est notamment le cas en physique où elles sont des objets incontournables.