Il faut se faire une raison

Yoan Tardy

25 septembre 2017

Maths
Pour Tous

Séminaire "Maths Pour Tous"

Table des matières

Introduction

L'objet de cet exposé est de vous montrer un panorama non exhaustif de ce que l'on peut trouver comme raisonnement ou comme automatisme dans la réflexion d'un mathématicien. Pour ce faire, il serait stérile de vous en faire un diaporama en présentant chaque technique à la manière dont on exposerait des tableaux dans un musée.. Ici, nous serons plus dans un garage, à manipuler les concepts comme des outils. C'est pourquoi cet exposé se fera à travers la résolution d'un problème.

1 Problème 1 : divisons un carré en carrés

La question est la suivante, en combien de petits carrés peut-on diviser un carré ? Autrement dit, quels sont les entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ (i.e $0, 1, 2, 3...$) tels qu'un carré puisse se diviser en n carrés ?

On veut conjecturer le résultat et le prouver. Qu'est ce qu'une conjecture ? C'est tout simplement une hypothèse du résultat, c'est l'étape où l'on se dit "on sent bien que c'est ce résultat, je sais pas trop pourquoi mais ça ne peut pas être grand chose d'autre". La conjecture peut très bien être fausse, il s'agit avant tout d'un point de départ de la réflexion, on peut la changer au cours de la réflexion si à force d'observer le problème on se rend compte que l'on a fait fausse piste. Maintenant qu'est se qu'une preuve ? C'est une grande question, mais modestement, on peut simplement dire qu'on part d'axiomes de départ que l'on choisit, puis par implications logiques, une propriété en entrainant une autre, on arrive finalement par retrouver dans cet enchaînement le résultat que l'on voulait montrer au départ. Il s'agit d'être parfaitement rigoureux et de savoir exactement pourquoi chaque affirmation donnée est vraie et irréfutable et de pouvoir faire référence à un éventuel théorème qui fait office de raccourci pour expliquer pourquoi une implication donnée est vraie.

La conjecture n'est pas claire... on ne sent pas très bien pour le moment pour quels nombres la propriété est vraie. Cela arrive souvent en maths, le problème est dur et donc la réponse paraît flou, on ne voit pas très bien où l'énoncé veut en venir et alors essayer de traiter le problème dans sa généralité semble être une piste infructueuse.

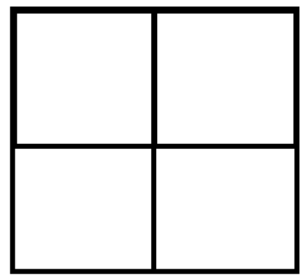
Lorsque vous avez vos écouteurs emmêler dans votre poche et que vous voulez le défaire, comment faîtes vous ? Vous tirez dans tous les sens pour prier que l'amas de noeuds se délie de lui même ? Ou alors vous commencer par vous dire " je vais commencer par résoudre une petite partie du problème, parce que comme ça c'est déjà ça de fait et ça peut peut-être me montrer la voie pour la suite" ? On est tous d'accord, on préfère commencer par enlever juste un petit noeud en espèrant que le problème nous apparaisse un peu plus simple, et bien c'est une idée générale en maths : on essaie d'abord de voir si on ne peut pas voir un cas particulier du problème, ou le simplifier dans un premier temps pour voir si on arrive dans un cas "facile", on enlève un noeud facile du problème.

Ici, quelle question facile peut-on se poser ?

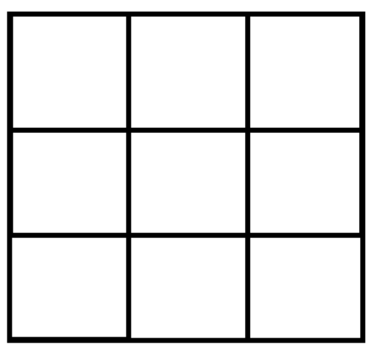
Conseil : essayez les petits cas, c'est-à-dire essayer de résoudre le problème pour des petites valeurs de n plutôt que directement le cas général.

Voici quelques premières remarques faciles :

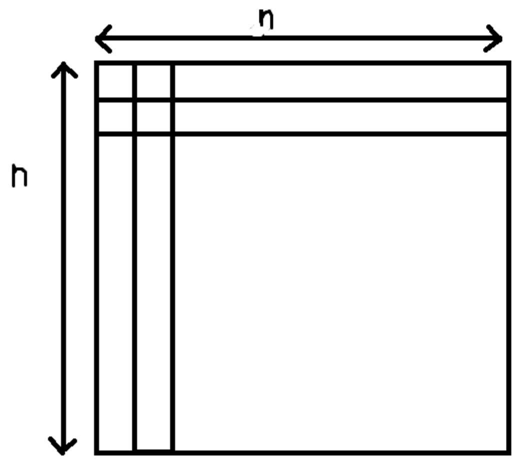
1. le cas $n = 2$ n'est pas possible, on le sent bien, si on met deux petits carrés côte à côte cela donne au mieux un rectangle, au pire ce n'est même pas un quadrilatère si les carrés ne se touchent pas vraiment.
2. le cas $n = 4$ est vrai, on coupe le carré en une grille 2x2.



3. le cas $n = 9$ est vrai, on coupe le carré en une grille 3x3.

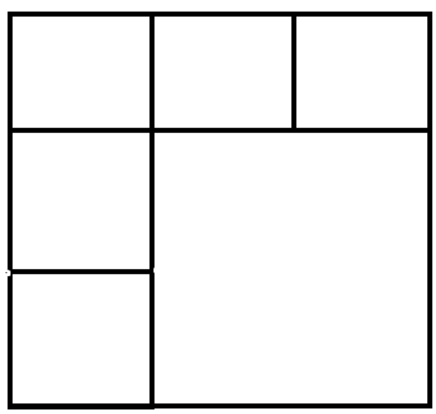


4. On peut généraliser cette idée : pour faire 4 ou 9, on voit que l'on quadrille le carré en 2x2 ou 3x3 ... ainsi en le quadrillant en nxn avec n un entier naturel, on obtient une division en n^2 petit carré. On en déduit que la division est possible pour tout entier s'écrivant comme un nombre au carré, c'est-à-dire un nombre multiplié par lui même.

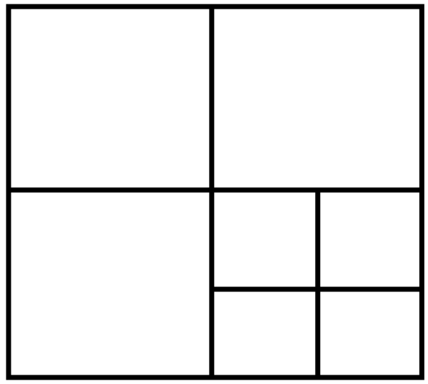


Posons nous quelques secondes et regardons ce que l'on a déjà obtenu : cela marche pour tous les nombres au carré, c'est-à-dire les nombres qui s'écrivent comme un nombre multiplié par lui-même, donc une infinité de nombre, mais pas pour 2, le résultat ne paraît pas encore très clair... C'est parce que les cas que l'on a traité sont trop simples pour le moment, l'essence du problème n'apparaît pas encore. Il faut donc continuer les petits cas qui vont se complexifier et donc auront plus de chance de nous éclairer à condition que l'on y arrive de manière à pouvoir généraliser notre démarche.

1. cas $n = 6$: On prend un quadrillage 3x3 et on transforme 4 petits carré d'un coin en un gros carré.



2. cas $n = 7$: On prend un quadrillage 2x2, puis on sépare un des carré de l'intérieur en 4.



3. cas $n = 10$: réfléchissons quelques minutes et prenons du recul... Je prétends qu'on a déjà virtuellement réglé le cas $n = 10$. Comment sommes nous passé de 4 à 7 ? On a pris un carré et qu'on l'a transformé en 4 carrés. Virtuellement, on a enlevé un carré pour en mettre 4 à la place, et donc on a finalement ajouté 3 carrés dans la division ! De 4, on est passé à 7 ... Mais combien font 7 + 3 ... ? 10 bien sûr ! Il suffit donc de prendre une division en 7 petits carrés(on a montré que ça existait), et de prendre un carré au hasard et de le diviser en 4 ! Mais pourquoi s'arrêter là ? Recommençons cette méthode qui nous a donné gratuitement 10 ! on a alors 13, puis de 13 on obtient facilement 16 ainsi de suite... Ce que vous ressentez au fond de vous maintenant, c'est le raisonnement par récurrence.

Definition 1.1. Le principe du **raisonnement par récurrence** dit que montrer qu'une propriété qui dépend de n est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ revient à montrer que :

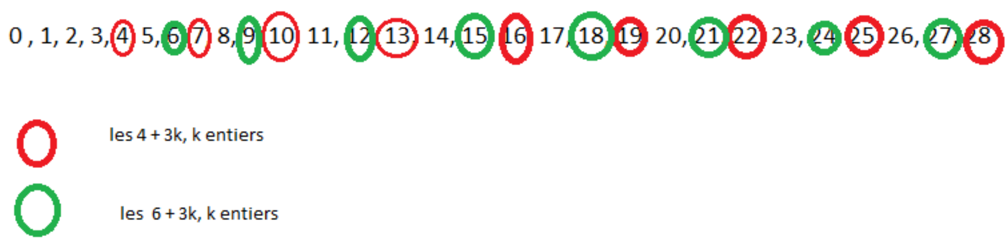
1. La propriété est vraie pour $n = 0$. Cette étape s'appelle l'**initialisation** de la récurrence.
2. Si la propriété est vraie pour un certain entier n, alors elle est vraie pour l'entier $n+1$. Cette étape s'appelle l'**hérédité** de la récurrence.

Si on a ces deux points, alors la propriété est effectivement vraie pour tout entier.

Revenons au problème de départ, ici on veut montrer la propriété P(k) : "un carré peut se diviser en $4+3k$ petits carrés" est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire qu'on peut découper un carré en $4, 7, 10, 13, 16, 19$...etc petits carrés.

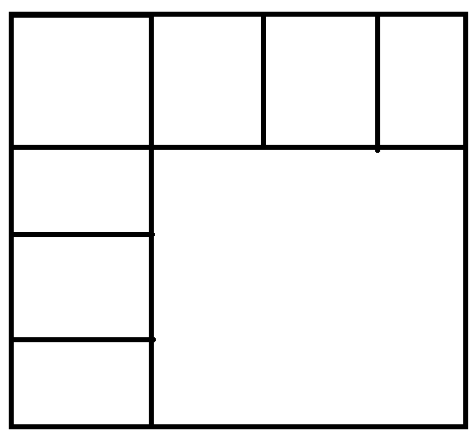
1. <u>Initialisation :</u> $k = 0$, on sait que c'est vrai, cela revient à découper un carré en $4 + 0 = 0$.
2. <u>Hérédité :</u> On fixe $k \in \mathbb{N}$ et on suppose que P(k) est vraie. Montrons que P(k+1) l'est aussi. Comme P(k) est vrai, on peut alors découper un carré en $4 + 3k$ carrés, il suffit alors de prendre un carré de la décomposition et de le séparer en 4, on a alors séparer le carré en $4 + 3k + 3 = 4 + 3(k + 1)$ petits carrés, donc P(k+1) est vraie.

De même, on remarque que si on a aussi $6, 8$, alors par le même raisonnement on aura les entiers du type $6 + 3k$ i.e 6,9,12,15,18..etc et $8 + 3k$ i.e 8,11,14,17... etc. Regardons sur un dessin les nombres que l'on a obtenu :



On voit qu'on a déjà tout les nombres plus grands que 6. On a déjà bien déblayé le problème ! Il reste juste à prouver qu'on a effectivement 8, car on avait déjà eut 6.

En maths on adore s'inspirer de ce qui a déjà été fait ! Tout simplement, pour la remarque qu'on a faite avec le fait de faire $+3$ en remplaçant un carré par 4 carrés, remarquons d'abord qu'on peut de même faire -3 si le cadre s'y prête (il faut avoir 4 carrés disposés correctement pour les remplacer par un seul gros carré). Mais pourquoi se limiter à découper un carré en 4 carré ? On peut le faire facilement avec tous les autres entiers pour lesquels on a déjà vérifié la propriété ! Regardons si on découpe un carré en 9, qui était un des cas très simples du début, alors on peut faire varier la quantité de carré dans la division de 8 !, ainsi, si on part de 16 (carré 4x4), si on fait -8 en transformant 9 carré en un gros, on obtient bien 8 carré !



Résumons ce que l'on a fait jusque là : on a prouver que le résultat était valable pour tous les entiers supérieurs à 6 et pour 4, il nous reste à traiter les cas de $3, 5$. Commencez par regarder les cas $n = 3$.

C'est sûrement la question la plus dur de l'exposé. Tout d'abord, a-t-on envie d'y croire ? Est-ce qu'on pense que c'est vrai ? On sent que c'est faux, $n = 3$ on ne sait pas trop expliquer pourquoi mais on sent que ce n'est pas possible.. Le rôle du mathématicien est d'offrir une preuve claire et indubitable de ce qui semble évident mais ne l'est pas ! On a déjà montré que c'était impossible pour un autre nombre (2), alors peut-être que la preuve pour 2 est adaptable ! Comment avait-on fait pour 2 déjà ... ?

AH ! En fait on n'a rien prouvé du tout, on a dit que c'était évident mais en réalité on ne savait pas bien pourquoi... En maths, même si c'est un formidable outil, il faut se méfier de son intuition, elle peut être trompeuse.

Je vous propose de réfléchir à une manière de prouver le cas $n = 2$ (qui serait adaptable au cas $n = 3$) dans un premier temps.

Le problème ici est qu'on a aucune prise pour travailler, aucune matière, on veut montrer qu'une chose n'existe pas... Conceptuellement on n'a pas l'habitude, on préfère montrer qu'une solution marche bien ! Je vous propose alors un raisonnement qui va vous apporter de la matière pour réfléchir :

Definition 1.2. Le **raisonnement par l'absurde** permet de montrer qu'une propriété P est fausse. Pour ce faire, on commence par supposer que P est vrai, puis en déduire les conséquences et essayer de tomber sur une conséquence absurde.

L'idée est la suivante : on veut montrer qu'un énoncé est faux, alors on va imaginer un instant qu'on évolue dans un monde où cette propriété est vraie et on va se promener dans cette réalité, et on va voir qu'on va tomber sur des résultats clairement impossible ! Cette réalité n'étant pas possible, le postulat de départ est alors faux.

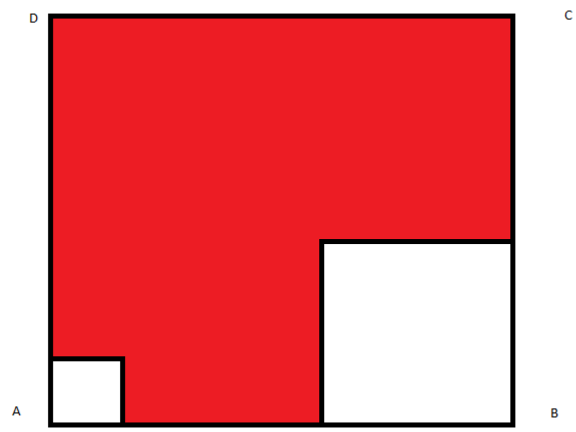
L'intérêt de ce raisonnement est qu'il donne de la matière supplémentaire pour réfléchir, en supposant le postulat de départ vrai, on peut l'utiliser à sa guise et le tordre dans tous les sens pour en tirer des vérités farfelues dans le nouveau monde que l'on a créé.

Dans le cas présent, supposons qu'un carré ABCD puisse effectivement se décomposer en 2 carrés que nous notons C_1, C_2. Le coin A appartient à un des deux carrés, disons C_1 quitte à les renuméroter. Or, ce coin est aussi un coin de ce petit carré. De là, on a la disposition suivante :

Alors, par hypothèse, l'aire qui reste est un carré et a 6 côtés : c'est absurde.

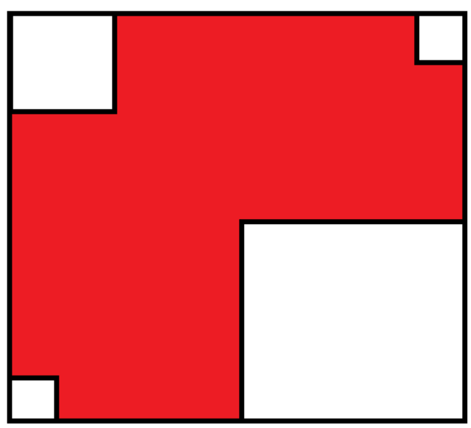
Peut-on adapter cette preuve à 3 ?

Oui bien sûr ! Raisonnons par l'absurde et supposons que ABCD puisse se décomposer en C_1, C_2, C_3. Il suffit de prendre les 2 coins A et B cette fois. On a par exemple A appartenant à C_1 et B appartient à un carré et il faut justifier que ce carré n'est pas C_1. Raisonnons de nouveau par l'absurde : si c'était le cas, C_1 contiendrait le côté AB et donc serait égal à ABCD, on aurait seulement divisé le carré en un gros carré, c'est absurde car on l'a strictement découpé en 3 carrés.



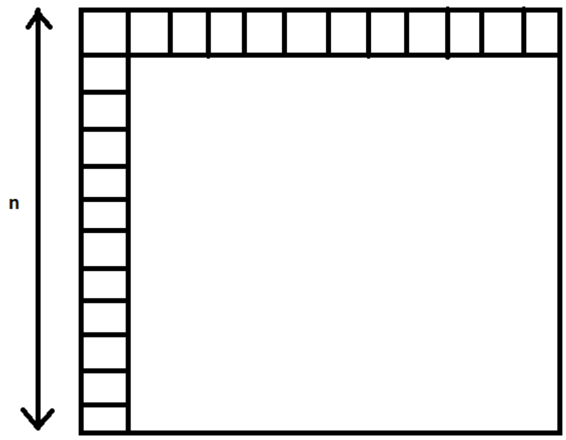
Donc, A et B appartiennent à 2 carrés différents et alors, l'aire qui reste est un carré : absurde une fois de plus.

Pour 5 maintenant ? C'est le même fonctionnement, et par chance, un carré à pile 4 coins ! la preuve s'adapte tout pile pour 5, mais pas pour un nombre plus élevé... Mais ça tombe bien, on a prouver le résultat pour tous les nombres plus grands que 6 ! On comprends un peu mieux pourquoi c'est à 5 que s'arrête les divisions impossibles.



J'aimerais vous donner une autre manière de traiter ce problème pour illustrer le fait que la solution d'un problème n'est pas unique, et aussi parce que la preuve est élégante en soit parce que ne fait pas intervenir une récurrence, on a un argument plus direct.

Commençons par prendre un entier n plus grand ou égal à 2, et découpons notre carré en un quadrillage nxn. Puis, regroupons le quadrillage $(n-1)$x$(n-1)$ en bas à droite du quadrillage en un gros carré.



Alors, on a $n + (n-1) + 1 = 2n$ carrés dans cette découpe. On a alors montré le résultat pour tous les entiers pairs plus grand que 4. Pour avoir les impairs plus grands que 6, il suffit de réutiliser la technique du "+3" sur tous les nombres que l'on vient d'obtenir, et on a alors conclut pour tous les entiers plus grands que 6.

Passons au problème suivant.

2 Problème 2 : rangeons les dominos

J'ai 10 dominos de longueur 2 et de largeur 1 que je veux ranger dans une boîte de longueur 10 et de largeur 2. On voit bien qu'il n'y a pas qu'une façon de les ranger, plusieurs motifs sont possibles. La question est la suivante : combien y a-t-il de manières différentes de les ranger ?

On s'attend en général à la méthode bourrine, on compte tous les motifs possibles à la main ou on éssaye de les ranger par catégories... Le problème c'est que, même si effectivement la méthode est concluante à condition d'organiser correctement sa réflexion, elle est bien trop longue ! Personne n'a envie de perdre sa vie à compter les dispositions possibles au cas par cas, surtout qu'il faut peut-être ensuite réfléchir sur un nombre plus conséquent de dominos.

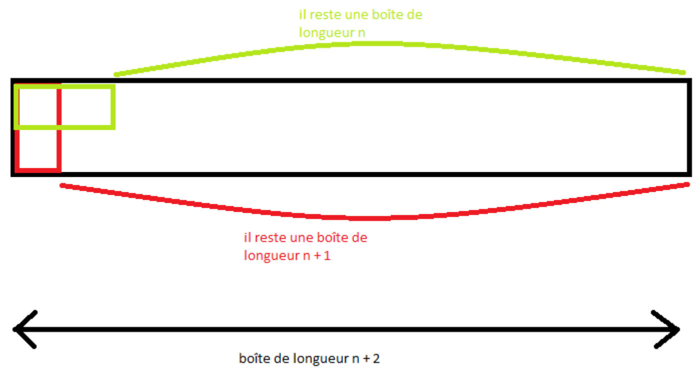
Le tout premier conseil de l'exposé que j'ai donné est ici la clé pour résoudre cet exercice : regarder les petits cas ! C'est à la fois se qu'il y a de dur et de beau en maths : on a beau avoir vu une solution d'un exercice, pensé l'avoir parfaitement compris, on se fait en fait toujours surprendre parce que finalement on n'a pas correctement digéré l'idée, ici, je ne vous ai dit qu'une fois de regarder les petits cas, et il faudrait que je vous le répète une bonne dizaine de fois au moins avant que vous y pensiez par vous même, mais c'est normal, il faut réellement digérer l'idée et il faut du temps.

Regardons alors le cas où la boîte ne mesure que 1 de longueur : il n'y a qu'une disposition possible.

Maintenant, si elle mesure 2 de longueur : il y a 2 dispositions possibles.

Regardons en détail le cas où la longueur est de 3, si vous le faite correctement, quelque chose pourrait vous apparaitre, sinon passez au cas 4 et ainsi de suite jusqu'à comprendre l'idée.

Distinguons les cas selon la position du premier domino posé : dans tout les cas on revient aux dispositions antérieurs.



De là, pour avoir $n = 3$, il suffit d'additionner les deux nombre précédents, pour 4 de même et ainsi de suite. En fait, si l'on nomme u_n le nombre de rangements possibles si on a une boîte de longueur n, alors, pour $n \geq 1$, on a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, c'est se qu'on appelle une suite récurrente d'ordre 2, et c'est quelque chose qu'on sait calculer avec un peu plus d'expérience et de théorèmes... mais pas besoin de sortir le bazooka, c'est maintenant plus rapide à calculer à la main : on trouve que le résultat est 89. On a utilisé ici une version un peu déformée du principe de récurrence, mais on a encore cette idée de trouver un appuis sur le cas juste avant le cas traité. Je le répète, on a beau savoir que le raisonnement par récurrence existe, on n'a pas le réflexe de l'utiliser, il faut l'avoir digéré.

Le dernier commentaire que je voulais faire était que je vous ai induit en erreur sur le dernier exercice en mettant un 10, ça vous laissait plus croire que c'était réalisable sans utiliser des idées trop abstraites que si j'avais juste mis n de manière générale. Cela illustre bien le fait que parfois, ce qu'on étudie n'est qu'un cas particulier d'un problème plus général qui, lui, est plus facile à résoudre car il ne contient que l'essence du problème pas les détails piégeurs.