Je crois que la Terre est plate

Lucas Willems

27 novembre 2017

Séminaire "Maths Pour Tous"

Table des matières

Figure 1 – Eclipse de lune

Dans les éclipses de Lune, la ligne qui limite l'ombre est toujours une ligne incurvée (1). Puisque l'éclipse est due à l'interposition de la Terre entre la Lune et le Soleil, c'est la forme de la surface de la Terre, sphérique, qui produit cette ligne courbe.

Aristote, Du Ciel, ∼ 350 av. J.C.

Introduction : une Terre pas si sphérique. . .

350 ans avant Jésus Christ, Aristote s'accordait déjà pour dire que la Terre est sphérique (2). C'est sûrement votre cas aussi. Toutefois, la Terre n'est pas vraiment sphérique, elle est applatie aux pôles. On dit plutôt que la Terre est une sphéroïde (3). Mais, ce n'est toujours pas exact puisque la Terre a des montagnes et un relief (4). Sa forme exacte est alors beaucoup plus complexe.

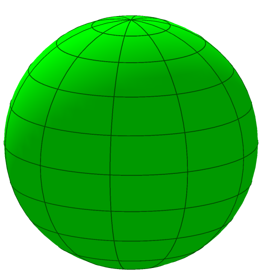

Figure 2 – Sphère

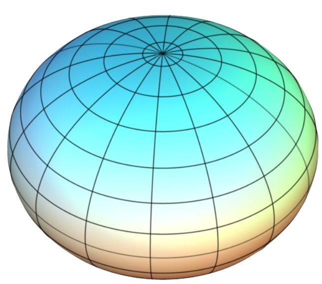

Figure 3 – Sphéroïde

Figure 4 – Terre avec relief

Pour autant, cela ne vous dérange pas d'assimiler un sphéroïde (la Terre) à une sphère, en partie par simplification, mais surtout parce qu'elles ont des structures assez proches : il est possible de transformer un sphéroïde en une sphère en l'aplatissant un peu (5) ou d'un sphéroïde à une sphère en la bombant un peu (5), c'est-à-dire, à chaque fois sans trop modifier la structure.

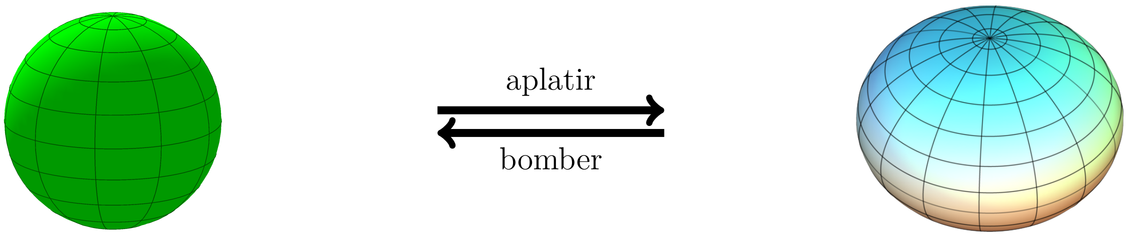

FIGURE 5 – Aplatir ou bomber

Par contre, cela vous dérangerait probablement beaucoup plus d'assimiler la Terre ou une sphère à un rectangle (6) et de la penser comme telle (7). Les structures semblent assez différentes : transformer l'un en l'autre sans trop modifier la structure semble assez compliqué.

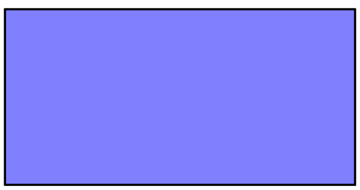

FIGURE 6 – Rectangle

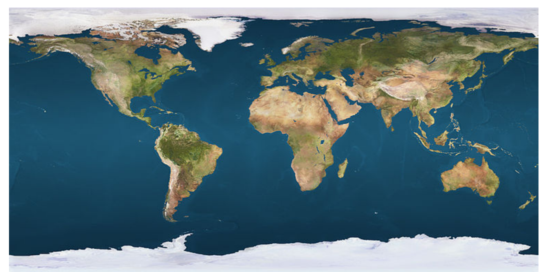

FIGURE 7 – Terre plate

Par exemple, est-il possible de transformer l'un en l'autre de telle sorte qu'un déplacement sans téléportation sur l'un sera aussi un déplacement sans téléportation sur l'autre, et réciproquement (8) ?

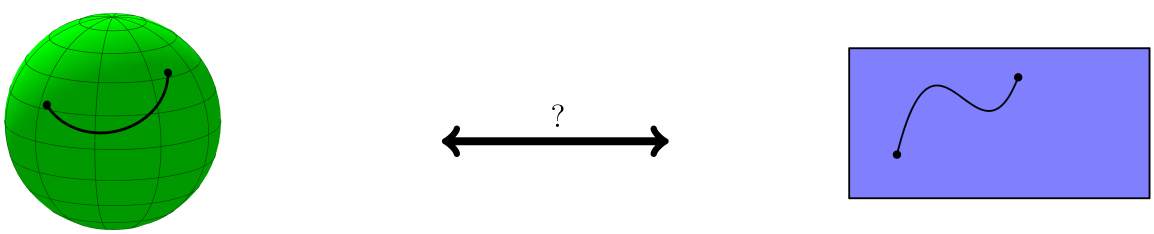

FIGURE 8 – Conservation des déplacements sans téléportation

Si l'on considère une **sphère** et un **rectangle**, est-il possible de **transformer l'un en l'autre** en conservant la propriété la plus basique en mathématiques, les **déplacements sans téléportation** ? Autrement dit, sans invoquer l'ombre sur la Lune ou la courbure de la Terre, juste en utilisant des déplacements sans téléportation en mathématiques, seriez-vous capable de distinguer une sphère d'un rectangle ? Ou au contraire, pourriez-vous croire que la Terre est plate ?

Face à cette question, le mathématicien va d'abord essayer de trouver une *définition mathématique* (1ère partie), c'est-à-dire une formulation sans aucune ambiguïté, puis ensuite de lui trouver une *réponse mathématique* (2ème partie), c'est-à-dire une réponse sans aucune ambiguïté.

Forts de cette expérience, nous serons alors aptes à comprendre l'énoncé de la conjecture de Poincaré, datant de 1904, proposée par Henri Poincaré, un grand mathématicien français. Cette conjecture fait partie d'un des sept problèmes du millénaire, problèmes réputés insurmontables, dont la résolution est dotée d'un million de dollar. J'avais essayé de comprendre l'énoncé avec des vidéos de vulgarisation depuis le lycée en vain et l'ai seulement compris termes à termes l'année dernière, en Master 1.

1 Définition

Le but de l'exposé est de résoudre le problème :

Problème. *Si l'on considère une sphère et un rectangle, est-il possible de :*

1. *transformer l'un en l'autre*
2. *en conservant les déplacements sans téléportation ?*

Mais pour ce faire, il nous faut nous mettre d'accord sur ce que "transformer l'un en l'autre" ou encore "conservant les déplacements sans téléportation" veut dire… Peut-être est-ce clair pour vous. Pour moi, ça ne l'est pas. Peut-être même que ça ne l'est pas vraiment pour vous non plus d'ailleurs.

En tout cas, si nous ne nous mettons pas d'accord sur la définition, comment pourrions-nous prétendre et espérer donner une réponse à une question qui serait interprétable de différentes manières ? Tout le monde pourrait donner une réponse différente en s'appuyant sur une interprétation qui lui est propre de la question.

Pour éviter cette situation, avant même d'essayer de résoudre le problème, il nous faut commencer par le définir explicitement, **sans aucune ambiguïté** et interprétation possible.

Remarque 1 (De l'intérêt de bien définir n'importe quel problème)**.** *De manière générale (pas seulement en mathématique), définir le plus explicitement possible un problème permet, en plus de lever toute ambiguïté pour les autres, de grandement s'aider en levant toute ambiguïté pour soi-même. Vous transformez alors une vague intuition en une évidence et poussez votre intuition bien au delà de ce qui est maintenant devenu évident.*

Ainsi, comment faire pour définir explicitement cette phrase ? Grâce aux mathématiques ! Et pour cause, nous allons faire appel à l'une des forces de cette magnifique discipline si ce n'est sa principale force : le fait que tout y soit défini et prouvé explicitement, sans aucune ambiguïté.

En effet, le mathématicien a commencé par se donner des axiomes, les régles du jeu, c'est-à-dire des énoncés de base, qu'il considère comme vrai et qu'il ne démontre pas (l'objectif est d'en avoir le moins possible). Ensuite, à partir de ces règles du jeu, il va essayer de démontrer cette fois-ci les autres énoncés qui lui semblent vrais, en trouvant les bons objets à définir et le bon enchaînement logique. Ainsi, comme les mathématiques sont faites de toute pièce par les mathématiciens (ce qui est aussi le cas en informatique mais en physique par exemple), tout y est bien défini et démontré.

Dit de cette manière : leur travail peut paraître simple. Il n'en est rien : bien définir un objet ou trouver le bon enchaînement logique pour démontrer un énoncé n'a vraiment rien d'évident et peut prendre beaucoup de temps (des années, des décennies voire des siècles) dans certains cas. Nous allons nous en rendre compte sous peu. Pour autant, il ne faut absolument pas avoir peur de cette difficulté : le résultat et la bien meilleure compréhension du problème que nous obtiendrons après nous être cassé la tête en valent largement la peine !

Assez parlé, revenons à notre sujet et lançons nous dans la définition de notre problème. Dans cette phrase, nous avons précisément deux parties à définir :

— les objets : **une sphère** et **un rectangle** ;
— la relation qui les relie : **transformer l'un en l'autre** et **en conservant les déplacements sans téléportation**.

1.1 Définition des objets

Tout d'abord, définissons les objets en question.

1.1.1 La sphère

Commençons par définir la sphère. Ou plus simple, commençons par définir le cercle (9).

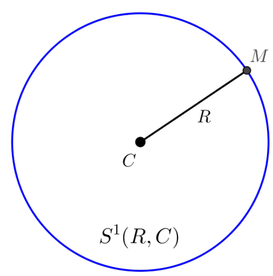

FIGURE 9 – Cercle $S^1(R, C)$

Qu'est-ce qu'un cercle ? C'est l'ensemble des points qui se trouvent à une distance R d'un centre C. Deux questions me viennent alors :

1. Ce sont les points de quoi ? Ce sont les points du plan, noté $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire les points ayant 2 coordonnées réelles. La première correspond à la position du point selon l'axe des abscisses, on peut la représenter par la lettre x ou n'importe quel autre symbole. La seconde correspond à la position du point selon l'axe des ordonnées, on peut la représenter par la lettre y. Ainsi, les coordonnées d'un point du plan (10) sont représentées par le couple (x, y).

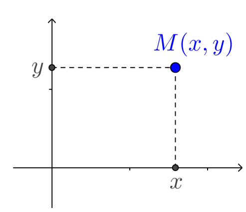

FIGURE 10 – Point

2. Que veux dire “à distance R d'un centre C” ? Naturellement, par distance, nous pensons à la distance euclidienne du plan, c'est-à-dire la distance obtenue par le théorème de Pythagore (11). Ce dernier nous dit que si nous avons un point A de coordonnées (a_1, a_2) et un point B de coordonnées (b_1, b_2), alors la distance séparant A et B est $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$.

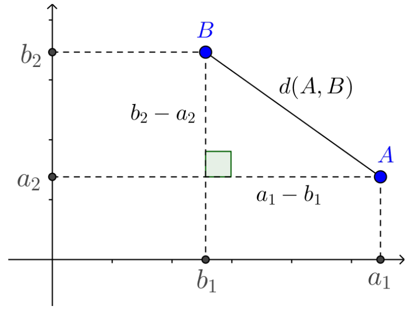

FIGURE 11 – Distance euclidienne

A partir de maintenant, nous notons $d_2(A, B)$ (2 parce qu'on est dans le plan) la distance entre deux points A et B. Mais pourquoi introduire cette notation alors que l'on pourrait très bien écrire $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$? Pour plusieurs bonnes raisons :

1. Il est plus court d'écrire $d_2(A, B)$ que $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$. S'il y a plusieurs occurences, cela peut vraiment soulager la rédaction.
2. A première vue, il n'est pas forcément évident de deviner que $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ correspond à la distance entre A et B, alors qu'en écrivant $d_2(A, B)$, la question ne se pose pas.
3. Savoir que la distance entre A et B se calcule avec la formule $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ a seulement une importance pour faire des calculs mais par pour comprendre la suite de l'exposé, seulement l'intuition de la distance suffit.
4. Utiliser la notation $d_2(A, B)$ permet de se détacher de la distance euclidienne et d'envisager d'autres distances possibles. En fait, de manière générale, une distance est tout simplement une fonction qui, à 2 points du plan ou de l'espace (ou d'autre chose), associe un nombre réel positif (la "distance") et qui vérifie plusieurs autres propriétés (inutiles à connaître pour l'exposé). Ainsi, il n'existe pas une mais plusieurs distances dans le plan ou dans l'espace et ce que je dis n'a rien de surprenant. Par exemple, il nous arrive fréquemment de raisonner en distance géographique (e.g. "j'habite à 3 km de l'ENS") ou en distance temporelle (e.g. "j'habite à 5 mns de l'ENS", 12) qui sont bien deux distances différentes et toutes deux différentes de la distance euclidienne.

FIGURE 12 – Distance TGV

Après toutes ces explications, nous pouvons définir simplement le cercle de centre C et de rayon R :

Définition 1 (Cercle)**.** *Le cercle de centre* C *et de rayon* R*, noté* $S^1(R, C)$*, est* $\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(M, C) = R\}$*, c'est-à-dire l'ensemble des points* M *du plan* $\mathbb{R}^2$ *tels que* $d_2(M, C) = R$*.*

Remarque 2 (Dimension du cercle)**.** *Le nombre 1 dans* $S^1(R, C)$ *correspond à la* dimension[1] *du cercle. Le cercle étant un trait, si on vit dessus, on ne peut faire qu'avancer ou reculer. Ainsi, 1 seule coordonnée suffit à décrire la position d'un point sur un cercle. Cela correspond à dire que le cercle est de dimension 1.*

Maintenant que nous avons défini le cercle, essayons de définir la sphère (13). Cela n'a rien de compliqué.

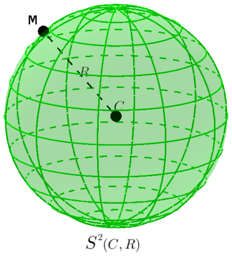

FIGURE 13 – Cercle $S^2(C, R)$

Qu'est-ce qu'une sphère ? C'est l'ensemble des points qui se trouvent à une distance R d'un centre C, sauf que cette fois-ci :

— Ce sont les points de l'espace, noté $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire les points ayant 3 coordonnées réelles correspondant à la position selon l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et l'axe des altitudes. On peut représenter les coordonnées par un triplet (x, y, z).

— La distance naturelle est la distance euclidienne de l'espace, une généralisation de celle du plan. Maintenant, si A est un point de coordonnées (a_1, a_2, a_3) et B un point de coordonnées (b_1, b_2, b_3), alors la distance séparant A et B est $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$.

Là encore, nous notons $d_3(A, B)$ (3 parce qu'on est dans l'espace) la distance entre A et B pour les mêmes raisons que précédemment.

Similairement au cercle, nous pouvons définir la sphère :

Définition 2 (Sphère)**.** *La sphère de centre* C *et de rayon* R*, notée* $S^2(C, R)$*, est* $\{M \in \mathbb{R}^3 \mid d_3(M, C) = R\}$*.*

Remarque 3 (Dimension de la sphère)**.** *Le nombre 2 dans* $S^2(R, C)$ *correspond à la dimension de la sphère. La sphère étant une surface, si on vit dessus, on peut avancer, reculer, aller à gauche ou à droite. Ainsi, 2 coordonnées suffisent à décrire la position d'un point sur une sphère. Cela correspond à dire que la sphère est de dimension 2.*

1. Eva Philippe aborde aussi la notion de *dimension* dans son exposé Maths Pour Tous.

1.1.2 Le rectangle

Parlons maintenant du deuxième objet qui nous intéresse et que vous connaissez bien normalement : le rectangle. C'est une figure du plan ayant 4 côtés et dont tous les angles sont droits. Un rectangle est caractérisé par la connaissance de la longueur L de son grand côté et de la longueur l de son petit côté. "Caractérisé" veut dire que si vous connaissez les longueurs L et l (14), vous ne pouvez dessiner qu'un seul rectangle correspondant à ces deux longueurs (sans prendre en compte les rotations et les translations possibles du rectangle).

Ainsi, nous pouvons facilement définir le rectangle de longueur L et l comme suit :

Définition 3 (Rectangle)**.** *Le rectangle de longueurs L et l, noté $R(L,l)$, est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq L,\, 0 \leq y \leq l\}$.*

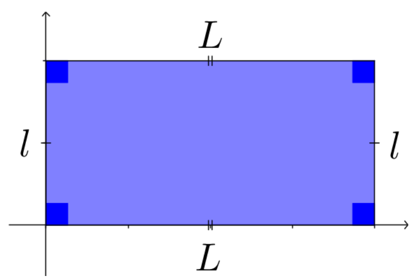

FIGURE 14 – Rectangle $R(L,l)$

Conclusion. *La définition :*

- *de la sphère $S^2(C,R)$ par $\{M \in \mathbb{R}^3 \,|\, d_3(M,C) = R\}$*
- *du rectangle $R(L,l)$ par $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq L,\, 0 \leq y \leq l\}$*

nous permet d'exprimer sans ambiguïté et très simplement ces deux objets et nous permettra, dans la suite de l'exposé, de les manipuler facilement.

1.2 Définition de la relation

Maintenant que nous venons de définir les objets, il nous reste à définir la relation entre les objets, c'est-à-dire "transformer l'un en l'autre" et "en conservant les déplacements sans téléportation".

Un problème compliqué à définir. Notre problème semble assez difficile à définir. Que faire ?

"Face à un problème difficile, trop dur pour être attaqué frontalement, le mathématicien **généralise le problème** et commence par **résoudre les cas les plus simples**. Une fois résolus, il va s'amuser à **regarder des cas de plus en plus compliqués**. La difficulté va croître, il y a comme un escalier. Et à travers cet escalier, il dira *ah voilà, j'ai compris* et il aura **compris l'idée générale**.". Ces propos, rapportés quasiment mot pour mot, sont ceux tenus par Alain Connes (15), un grand mathématicien, dans un entretien exceptionnel donné au Collège de France (version courte, version longue).

FIGURE 15 – Alain Connes

Remarque 4 (De l'intérêt de cette méthode pour résoudre n'importe quel problème)**.** *De manière générale (pas seulement en mathématique), la méthode consistant à s'attaquer d'abord aux cas les plus simples proposée par Alain Connes permet de résoudre toute sorte de problème. Par exemple, si je vous dis : "arrêtez de lire et faîtes 100 pompes". Il est très probable que vous n'en soyez pas capable sans entraînement. Par contre, si je vous dis : "faîtes 10 pompes", puis plus tard "faîtes 20 pompes"... peut-être qu'un jour vous serez capable d'en faire 100.*

Pour essayer de définir notre problème, nous allons suivre la méthode proposée par Alain Connes. Commençons par généraliser le problème. Nous allons plutôt essayer de définir ce problème généralisé :

Problème généralisé. *Si l'on considère un ensemble X avec une distance d_X et un ensemble Y avec une distance d_Y, est-il possible de :*

1. *transformer l'un en l'autre*
2. *en conservant les déplacements sans téléportation ?*

Remarque 5 (De la peur de l'abstrait)**.** *Savoir concrètement quels ensembles et quelles distances nous manipulons ici n'apporte rien ici. Savoir seulement que X et Y sont des ensembles et d_X et d_Y sont des distances suffit. Si jamais, prendre des ensembles et des distances quelconques vous fait peur (ce qui ne devrait pas être le cas), rien ne vous empêche de garder en tête des exemples. Par exemple, vous pourriez prendre le rectangle avec la distance d_2 du plan et la sphère avec la distance d_3 de l'espace, ou encore les Etats-Unis avec une distance en miles et la France avec une distance en kilomètres.*

Continuons la méthode d'Alain Connes : essayons maintenant de définir les cas les plus simples de cette phrase. Problème : quels cas simples considérer ?

Quels cas simples considérer ? Résoudre des cas intermédiaires à un problème compliqué permet de faire des sauts conceptuels plus faibles. Vous faîtes plus de sauts mais des sauts d'amplitude plus faible. Dans l'exemple d'Alain Connes, vous rajoutez des marches dans votre escalier mais des marches d'hauteur plus petite.

Choisir les bons cas intermédiaires correspond à choisir des cas dont la résolution ne nécessite pas un saut conceptuel trop grand, pour que le cas puisse être résolu, mais pas non plus trop petit, pour que la résolution du cas apporte quelque chose à la résolution du cas général.

Face à un problème que personne ne sait encore résoudre, le mathématicien ne sait pas d'avance quels sont les bons cas intermédiaires à considérer. Il va tâtonner, essayer certains cas qui seront peut-être trop simples, et qui ne le feront pas avancer, ou trop compliqués, et qu'il ne saura résoudre. Le premier mathématicien qui réussira à résoudre le problème “ouvrira la voie, trouvera un chemin pour arriver au sommet de la montagne". D'autres mathématiciens "vont pouvoir repasser derrière, mettre des pitons ici et là, pour que tous les autres puissent prendre le chemin dans la foulée". Ces propos, rapportés quasiment mot pour mot, sont ceux tenus par Cédric Villani (16), un autre grand mathématicien, dans la séance de questions après sa conférence *La meilleure et la pire des erreurs de Poincaré* (version courte, version longue).

FIGURE 16 – Cédric Villani

De l'importance de l'enseignant. En ce qui nous concerne, nous ne sommes pas dans le cas où encore personne ne sait définir notre problème. Vous, lecteurs, si vous vous enfermez seul dans une pièce, vous serez dans les mêmes conditions qu'un mathématicien face à un problème que personne ne sait encore résoudre et vous serez confrontés aux mêmes difficultés concernant le choix des cas intermédiaires. Mais, sauf erreur de ma part, vous n'êtes pas dans ces conditions, vous êtes en train de lire ce polycopié, vous êtes en train de me lire.

Personnellement, je sais comment bien définir notre problème, je sais quel est le bon enchaînement de cas intermédiaires à considérer. Et si je vous donne cet enchaînement, vous gagnerez beaucoup de temps dans la recherche de la définition. Mais, peut-être êtes-vous en train de vous demander : *pourquoi ne nous donne-t-il pas directement la définition alors ? Ca irait encore plus vite...* C'est vrai ! Mais notre but est-il de simplement connaître la définition ? Notre but n'est-il pas aussi de la comprendre ? Ce qui est d'ailleurs bien plus intéressant...

En effet, le seul but de mon polycopié est de vous **faire comprendre** la définition du problème et sa résolution. De manière générale, ce but (faire comprendre) est celui de tout enseignant. Ce qui va différencier deux enseignants sera la manière de s'y prendre : quel chemin feront-ils emprunter à leurs élèves pour qu'il arrivent en haut de la montagne ? Un bon professeur sera celui qui choisira le bon chemin.

Personnellement, le chemin que je choisis pour vous faire comprendre la définition du problème est le suivant : vous mettre face au problème, comme le serait un mathématicien fasse à un problème sans solution, mais en vous donnant les bons cas intermédiaires à considérer.

3 cas simples. *C.f. slides*

1.2.1 Transformer l'un en l'autre...

C.f. slides

1.2.2 ... en conservant les déplacements sans téléportation

C.f. slides

2 Résolution

2.1 Sphère et rectangle homéomorphes ?

C.f. slides

2.2 Quelques autres résultats

Les lettres majuscules écrites dans une police sans-serif :

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

peuvent être réparties en plusieurs classes d'homéomorphismes qui sont :
- A R
- B
- C G I J L M N S U V W Z
- D O
- E F T Y
- H K
- P Q
- X

C.f. slides pour le reste

Ouverture : vers la conjecture de Poincaré

Malheureusement, cette partie ne sortira pas.